

ABSTRACCIÓN
DE LA
CONSONANCIA

Luis de la Barrera-Montenegro Álvarez
© 2013

ABSTRACCIÓN DE LA CONSONANCIA

Introducción	Pág. 3
1.1.- Significado armónico de la razón interválica	Pág. 3
1.2.- Fundamentales armónicas	Pág. 4
1.3.- Consonancia-disonancia	Pág. 5
1.4.- La serie físico-armónica como elemento integrador	Pág. 6
1.5.- Ordenación de los intervalos conforme a su frecuencia	Pág. 7
1.6.- Ordenación de los intervalos conforme a la interacción armónica de sus armónicos constituyentes	Pág. 7
1.7.- Gradación consonancia-disonancia en el ámbito de la octava	Pág. 10
1.8.- Determinación de las ecuaciones de las curvas primarias	Pág. 14
1.9.- Consonancia-disonancia fuera del ámbito de la octava	Pág. 19
1.10.- Gradación interválica en función de la consonancia fuera del ámbito de la octava	Pág. 21
1.11.- Criba interválica en función de la resolución de frecuencia del oído humano	Pág. 28
1.12.- Consonancia y disonancia en los sistemas de justa entonación y temperado	Pág. 32
1.13.- Conclusión	Pág. 41
Anexo.- Relaciones entre los 128 primeros armónicos de la serie físico-armónica en el ámbito de la octava	Pág. 43

ABSTRACCIÓN DE LA CONSONANCIA

El presente trabajo tiene su origen y razón de ser en uno anterior denominado “Sistemas Musicales Armónicos”, acabado a finales de 2004 y dado a conocer posteriormente a través de la Red (www.luisdelabarrera.com). En el mismo, y partiendo del principio físico-armónico, se realizaba una deducción y descripción de los principales sistemas musicales armónicos que han configurado la historia de la música occidental desde sus orígenes hasta nuestros días. Este planteamiento de inicio permitía dar un nuevo enfoque al modo en que los diversos sistemas musicales armónicos se originan, bajo un punto de vista puramente matemático, al margen del momento histórico y razones musicales o estéticas que dieron lugar a sus apariciones y transformaciones. La constatación de que cada intervalo, componente de un sistema musical o no, se origina mediante la interacción de dos armónicos de una única serie básica, sirviéndole como soporte y diferenciándolo de todos los demás por sus cualidades exclusivas, derivó en la necesidad de obtener un procedimiento, lo más objetivo posible para determinar el grado de consonancia o disonancia de los mismos.

El tema de la consonancia-disonancia ha sido tratado desde numerosos puntos de vista, dependiendo de la ciencia dentro de la cual se haya realizado su estudio: musical, física, acústica, psicoacústica, ... Aunque todas ellas parten de unos principios y fundamentos similares, los resultados a los que se llega están, al final, repletos de subjetividad y contaminados tanto a causa de los experimentadores como por los sujetos experimentados, al tratarse de una sensación, aunque si bien es cierto que los resultados aludidos no dejan de ser los más cercanos y coincidentes con la realidad.

En este trabajo se ha querido prescindir del elemento subjetivo en su totalidad, basando todas las conclusiones a las que se ha llegado en razonamientos casi exclusivamente matemáticos derivados de la aplicación de las leyes que se establecen partiendo del principio físico-armónico. Así se ha podido establecer un procedimiento de cuantificación del intervalo, sea simple o compuesto, en el que desaparece todo posible elemento subjetivo, realizando una abstracción absoluta respecto al concepto “consonancia-disonancia”, según se ha venido manejando a lo largo de los tiempos.

1.1.- Significado armónico de la razón interválica.- Aunque la definición de intervalo en música es de sobra conocida (relación, razón, distancia o diferencia que existe entre dos notas o sonidos distintos) y es de una utilidad práctica fuera de toda duda, se hace necesario, en la búsqueda de una unificación de conceptos que posibilite la cuantificación de las reglas armónicas que rigen los sistemas musicales armónicos o, lo que es lo mismo, una formulación armónica, introducir una nueva que, sin invalidar la anterior, confiera a la definición de intervalo musical su verdadera y absoluta dimensión armónica, al margen de sistemas y escalas, regulares o no.

Así, se denominará intervalo a cualquier relación, razón o diferencia que se establezca entre dos armónicos de una serie físico-armónica, ya sean estos conjuntos o disjuntos y sobrepasen o no los límites de una o más octavas, así como también se definirá como intervalo la relación que se establezca entre dos series físico-armónicas cualesquiera derivadas de una serie físico-armónica fundamental o primaria.

Los armónicos y no las notas musicales son pues la esencia sobre la que se construyen los intervalos sonoros, aunque a efectos musicales se utilicen únicamente una infinitésima parte de los mismos para dotar de significación a un determinado sistema.

Por tanto, cualquier combinación de sonidos, musical o no, estará constituida por al menos dos armónicos, que definirán, sin ninguna posible incertidumbre, la relación o relaciones armónicas establecidas y la percepción que de las mismas realiza el sentido auditivo.

A efectos prácticos, es de destacar la diferente orientación armónica que adquieren intervalos equivalentes (como pudieran ser los constitutivos de un acorde perfecto mayor) al pasar a formar parte

de un determinado discurso musical, dependiendo de la fundamental básica real sobre la que dichos intervalos se hayan generado.

1.2.- Fundamentales armónicas.- También, en los estudios tradicionales de armonía, se define como fundamental a la nota más grave constitutiva de un acorde, generalmente formado por terceras superpuestas. Dependiendo de la nota o grado de la escala sobre la que se cree ese acorde, su fundamental se denominará con el nombre de la nota o el número del grado que representa. Así, se hablará de fundamental del acorde de primer grado o de tónica, fundamental del acorde de séptima de dominante o acorde sobre el quinto grado con séptima menor, etc.

Sin embargo, la aceptación de dicha nota como fundamental no es más que un convencionalismo, muy útil, pensado para poder llevar a cabo una eficaz nomenclatura y mejor unificación de los distintos acordes que pueden formarse a partir de los diversos grados de una escala y de sus grados alterados en más o menos semitonos.

Al definir aquí el intervalo como una relación o razón entre armónicos, pertenecientes a una serie físico-armónica, la idea de fundamental adquiere también un nuevo significado, ya que dicho término pasa de definir un convencionalismo al uso a especificar una propiedad física, única e inmutable que no coincide, en gran número de ocasiones, con la descripción tradicional.

Trasladando la definición habitual de fundamental al mínimo posible de relación sonora, tal como es un intervalo, melódico o armónico, se puede hablar también de fundamental de un intervalo. Así, supuestamente, el intervalo de octava (relación 2:1) tendría como fundamental a su armónico más grave o inferior, en este caso el 1; del intervalo de quinta justa (relación 3:2) sería el 2; del intervalo de tercera mayor (relación 5:4) sería el 4; del intervalo de tercera menor (relación 6:5) sería el 5. Pero esta forma de considerar las cosas, no deja de ser, al fin y al cabo, caprichosa y exenta de rigor.

Realmente en el caso de las tres primeras relaciones, la octava, la quinta justa y la tercera mayor, podría considerarse que, efectivamente, tales fundamentales descritas son las verdaderas (aunque luego se verá que no es así sino en un único caso), pero, ¿qué razón hay para asignar el valor 5 como fundamental de una tercera menor? Realmente ninguno. En términos absolutos, el intervalo de tercera menor (6:5) describe la relación sonora que se establece entre los armónicos 5 y 6 de una serie físico-armónica que tiene a la unidad como fundamental. Luego, la **fundamental armónica absoluta** (llamada en algunos estudios "fundamental ausente") de ese intervalo está a dos octavas y una tercera mayor inferiores de distancia del primer sonido constitutivo del intervalo en cuestión. Concretándolo en notas musicales, el intervalo LA₄-DO₅, aislado, sin ninguna otra referencia sonora que perturbe la relación, tiene como fundamental armónica absoluta a FA₂, de acuerdo a la generación natural de armónicos (FA₂ – FA₃ – DO₄ – FA₄ – LA₄ – DO₅). Por tanto, ninguna de las dos notas, que constituyen dicho intervalo, son fundamentales de nada, al no ser que tal intervalo se tomara como la relación existente entre las fundamentales de dos líneas armónicas (series físico-armónicas), en este caso la L₃ y la L₅, pero esta es otra cuestión.

Y volviendo a los otros intervalos puestos como ejemplos, la octava (relación 2:1), la quinta justa (relación 3:2) y la tercera mayor (5:4), tendrán así mismo como fundamental armónica absoluta el armónico 1, o fundamental de la serie físico-armónica propuesta, que aglutina a todos esos intervalos bajo un mismo patrón de medida y los sitúa en su precisa y correcta dimensión armónica.

Conocer cual es la fundamental armónica absoluta de una sucesión o superposición de sonidos es de suma importancia al objeto de establecer, de forma inequívoca, su centro armónico y las relaciones que se establecen con los sonidos sucesivos.

Pero, aparte de la fundamental armónica absoluta, cualquier intervalo posee también una **fundamental armónica relativa**, a veces coincidente con la anterior. Si se toman como ejemplo otros dos intervalos, esta vez formados por los armónicos 12 y 15, el primero, y 36 y 45, el segundo, puede

comprobarse fácilmente que tanto uno como otro dan lugar a una tercera mayor (relación 5:4). Si tales intervalos se producen aislados, sin referencia sonora previa o continuidad entre uno y otro, podremos decir que cada uno tiene su fundamental armónica absoluta que, en ambos casos, se encontrará a dos octavas de diferencia por debajo de la nota más grave de uno y de otro. En el caso del primero, su fundamental armónica absoluta sería el armónico de valor 3 y, en el segundo de valor 9. Tanto el armónico 3 como el 9, podrían considerarse así como fundamentales armónicas de dos series físico-armónicas distintas.

Ahora bien, si ambos intervalos se producen simultáneamente o en continuidad, o sea se ponen en relación el uno con el otro, inmediatamente el resultado cobra un nuevo significado: ambos intervalos pasan a ser constitutivos de una misma serie físico-armónica cuya fundamental es el armónico 1 y las que antes parecían ser fundamentales armónicas absolutas (armónicos 3 y 9) de cada intervalo, se convierten en sus fundamentales armónicas relativas.

Estos procesos físico-acústicos relacionados con la percepción de una "frecuencia de repetición", entre armónicos, o de una "fundamental ausente" o virtual han sido corroborados por innumerables experimentos realizados en la segunda mitad del siglo XX por numerosos investigadores en el campo de la psicoacústica (Houtsma, Goldstein, Plomp, Smoorenburg...) y confirman notablemente las afirmaciones realizadas anteriormente.

Resumiendo, mientras la fundamental armónica absoluta indica la situación del centro armónico, tonal o no, durante el discurso musical, las fundamentales armónicas relativas, que cambian con cada nota o con cada acorde las más de las veces, permiten conocer el grado, tendencia, evolución y resolución de las tensiones armónicas de las combinaciones sonoras, posibilitando un seguimiento armónico y estructural muy preciso del discurso mencionado.

1.3.- Consonancia-disonancia.- En la pretensión, pues, de realizar un estudio de las leyes armónicas de la forma más precisa y real posible, basado en la cantidad o en el número, se hace imprescindible abordar otro aspecto esencial en las relaciones sonoras, como es el de la consonancia.

En primer lugar es necesario recordar que la percepción de consonancia o no de los intervalos tiene una gran componente subjetiva y que depende de muchos factores adicionales que pueden condicionar, en un sentido u otro, la respuesta del individuo con el que se experimente. Se sabe, no obstante, que hay determinados intervalos que no dan lugar a controversia alguna en la actualidad al catalogarlos como consonantes o disonantes y que, por otra parte, muchos estudios realizados confirman la existencia de una denominada "banda crítica", en la percepción sonora, a partir de la cual cualquier intervalo que se produzca será considerado disonante, en mayor o menor medida. Como regla general, y de acuerdo a esa "banda crítica", se conceptúa como disonante a todo intervalo cuya razón sea inferior a la de una tercera menor (relación 6:5), a partir de la cual comienzan a manifestarse las sensaciones de "rugosidades" y "batidos", que hacen percibir los sonidos desde disonantes a desagradables y molestos. También la percepción de mayor o menor consonancia de un mismo intervalo varía si este se produce en frecuencias graves o agudas; a medida que la misma relación interválica se desplaza hacia el grave su percepción como disonancia aumenta. El timbre de cada sonido constitutivo de un intervalo también puede modificar el grado de consonancia. Pero, en cualquier caso, en estos experimentos psicoacústicos de laboratorio siempre sigue existiendo el factor subjetivo, imposible de evitar al contar con seres humanos para su realización, que lastra de una u otra forma la posibilidad de obtener resultados absolutos y sin interferencias, ajenas a la propia medida que se pretende realizar, lo que impide llegar a la concreción de una escala de medida o gradiente consonancia-disonancia exento del elemento subjetivo.

Existe también otra cuestión que hay que valorar cuando se trata de realizar una curva consonancia-disonancia mediante pruebas psicoacústicas y tiene que ver, precisamente, con la forma en que las mismas se desarrollan y la existencia constatada de una "fundamental ausente". Si partimos de una frecuencia concreta, pongamos la nota LA del diapason (440 Hz), para determinar el grado de

consonancia o disonancia de los intervalos que se producen entre ese sonido y otros superiores, dentro del ámbito de una octava (880 Hz), puede verse lo que ocurre con relación a los intervalos constitutivos de una escala cromática, que discurre por el ámbito descrito, analizando los datos de la tabla siguiente:

Determinación de las fundamentales ausentes entre las notas de una escala cromática y su nota base													
Nota	La	Si b	Si	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La
Frecuencia	440	469,3	495	528	550	586,6	618,7	660	704	733,3	782,2	825	880
Intervalo con La (440)	Unis.	2ª m	2ª M	3ª m	3ª M	4ª J	5ª D	5ª J.	6ª m	6ª M	7ª m	7ª M	Oct.
Razón	1:1	16:15	9:8	6:5	5:4	4:3	64:45	3:2	8:5	5:3	16:9	15:8	2:1
Fundamental	La	Sib	La	Fa	La	Re	Mib	La	Fa	Re	Sol	La	La
Fr. de la fundamental	440	29,3	55	88	110	146,6	9,7	220	88	146,6	48,8	55	440

Se observa que el sonido LA de 440 Hz únicamente es la fundamental armónica o “fundamental ausente”, aunque en este caso real, de los intervalos de unísono y octava. Otros intervalos, tales como el de 2ª M, 3ª M, 5ª J y 7ª M, también tienen el sonido LA como fundamental, pero en octavas inferiores a la frecuencia de 440 Hz. Y, luego, otra serie de intervalos tienen como fundamentales notas que no tienen nada que ver con su sonido primario. Así, la 2ª m tiene como fundamental un SI bemol de 29,33 Hz; la 3ª m reposa sobre un FA de 88 Hz, al igual que la 6ª m; la 4ª J y la 6ª M tienen como base un RE de 146,66 Hz; la 5ª D se sustenta sobre un MI bemol de 9,67 Hz; por último, la 7ª m tiene como fundamental un SOL de 48,88 Hz.

De esto se deduce que al mantener fija la frecuencia grave (LA de 440 Hz) variando la frecuencia superior para conseguir el intervalo deseado, se pierde el sentido de una referencia absoluta ya que se van produciendo, de forma continuada, distintas fundamentales armónicas para cada uno de los intervalos en cuestión. Este procedimiento resulta, por esta causa, por lo menos ambiguo ya que a la sensación distinta que produce cada intervalo, por sí mismo, hay que añadirle la desorientación sensorial que un continuo cambio de fundamental armónica genera en las personas objeto de estudio.

1.4.- La serie físico-armónica como elemento integrador.- Por tanto, en la búsqueda de la esencia misma de la armonía, de sus leyes y de las reglas que conlleva su aplicación, al margen de factores externos que condicionen o adulteren sus valores, propiedades y efectos, se hace necesario prescindir de los resultados que las experimentaciones aludidas determinan, lastrados por las insalvables “deficiencias” del mundo físico, a sabiendas, no obstante, de que los nuevos que se obtendrán serán casi idénticos o muy similares a los de aquellas, aunque encontrados o sintetizados mediante planteamientos analíticos y, por ende, exentos del elemento subjetivo.

Para ello se partirá, como es habitual, de una serie físico-armónica básica, con origen en la unidad, y sus correspondientes series físico-armónicas formadas por cada uno de sus armónicos, denominadas también líneas armónicas, y generadoras, todas ellas, del triángulo armónico universal (ver Sistemas Musicales Armónicos, estudio publicado en www.luisdelabarrera.com).

Dado que la serie básica está compuesta por armónicos representados por los números naturales, así como todas aquellas que se derivan de la misma, las relaciones que se van a establecer siempre serán a través de dichos números, por lo cual no puede darse, en ningún caso, una linealidad o continuidad de frecuencias, al contrario de lo que ocurre en los procesos experimentales, donde la variación de al menos una de las frecuencias relacionadas se efectúa, en muchos casos, a modo de barrido continuo por toda la gama audible.

Así, se estudiarán las interacciones que tienen lugar entre cada uno de los 128 primeros armónicos constitutivos de una serie físico-armónica. La elección de 128 armónicos obedece a que son todos los que pueden desplegarse en una gama de frecuencias que comprende un conjunto de siete octavas sucesivas, que es, por poco, el ámbito sonoro utilizado en la práctica musical. El primer sonido (armónico 1) correspondería a la primera nota de la octava más grave y el último (armónico 128) lo

sería de la última nota de la octava más aguda. El comienzo y final de cada octava quedaría limitado por los armónicos 1-2-4-8-16-32-64-128, ocupando todos los demás lugares intermedios conforme a su valor (frecuencia).

Como se ve, el propio enunciado impide que en las primeras octavas se pueda dar una gama similar a una escala; en la primera ni tan siquiera un sonido intermedio, en la segunda uno solo que se correspondería con la 5ª J (armónico 3), y, así, cada octava sucesiva iría incorporando cada vez más sonidos intermedios (1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-...). Esto viene a indicar que cualquier posible sonido que no pueda ser expresado por un número natural, tendrá que pertenecer, forzosamente, a una serie físico-armónica distinta de la elegida y, por tanto, al margen del estudio que se pretende realizar (ver gráfico Teclado en la página 33).

1.5.- Ordenación de los intervalos conforme a su frecuencia.- Al objeto de construir una gráfica en la cual puedan mostrarse todos los intervalos simples (ámbito de una octava), formados por los armónicos objetos de estudio, se procederá a ordenarlos primero conforme a la frecuencia que resulte al relacionarlos unos con otros de dos en dos.

Para ello, el cociente obtenido al resolver la fracción formada por los armónicos relacionados se situará en una línea (eje de abscisas), dividida en cents, en orden creciente según su valor. Esta línea, al contener únicamente intervalos simples abarcará, por tanto, una extensión de 1200 cents (1 cents = $2^{1/1200} = 1,00057779$) y el valor y situación de cada uno de ellos en aquella se obtendrá mediante la fórmula:

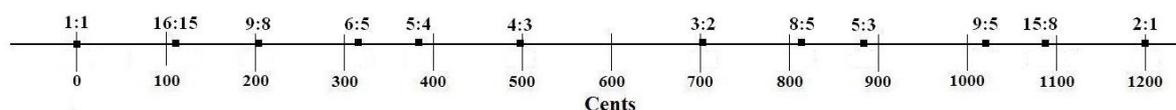
$$\text{Valor del intervalo } c \text{ en cents} = \frac{1200 \log c}{\log 2}$$

en donde c representa el valor o cociente de la razón formada por cada par de armónicos relacionados.

Así, el intervalo 5:4, que relaciona el cuarto y quinto armónico de la serie fundamental, tiene como valor 1,25. Su valor en cents se obtendrá utilizando dicha fórmula:

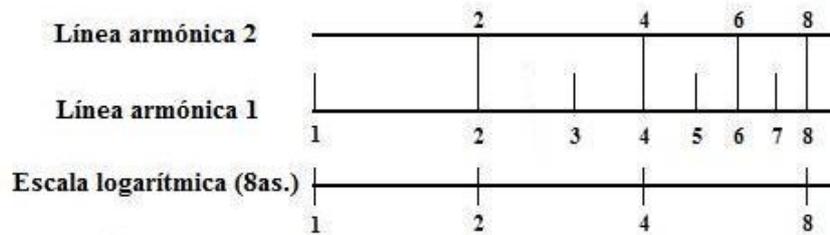
$$\text{Valor del intervalo } 5:4 \text{ en cents} = \frac{1200 \log 1,25}{\log 2} = 386,31 \text{ cents}$$

En la gráfica siguiente aparecen una buena parte de los intervalos más usuales en la música occidental, ordenados de menor a mayor, según su valor en cents.



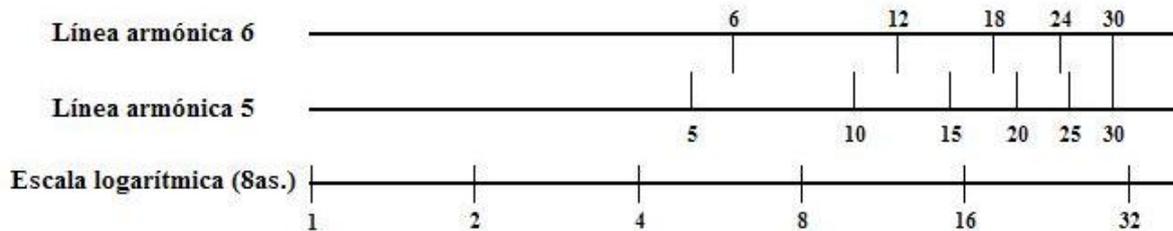
1.6.- Ordenación de los intervalos conforme a la interacción armónica de sus armónicos constituyentes.- Pero también puede hacerse una ordenación de esos mismos intervalos conforme a la interacción que sus líneas armónicas particulares producen entre sí.

Cada armónico correspondiente a la serie físico-armónica fundamental, de base unidad, genera su propia y particular serie o línea armónica. Así, por ejemplo, el segundo armónico (2), octava del primero (1), produce la serie de armónicos 2-4-6-8-10-12-... Como puede observarse, dicha serie está formada por todos los armónicos pares de la serie básica, por lo cual, al sonar ambas de forma conjunta, se verán realzados los armónicos pares, en detrimento de los impares, contenidos en la serie fundamental, y que, por otra parte, provocarán "roces" por ser incompatibles con la otra serie en cuestión. En el esquema siguiente pueden apreciarse estas características de sincronismo y de choque entre la serie físico-armónica fundamental y la serie formada a partir de su octava.



Se observa claramente que existe un sincronismo cada dos armónicos de la serie básica por cada uno de la serie a su octava. Por otra parte, los armónicos impares de la serie básica forman intervalos diversos, distintos del unísono o la octava con los armónicos adyacentes de la otra serie, como son: 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, 7:6 y 8:7. Y, conforme ascendemos en las series, estas relaciones aumentan en cantidad por octava y decrecen en su valor interválico, tendiendo progresivamente a la unidad.

Este mismo procedimiento de análisis se puede llevar a cabo con cualquier otro tipo de relación interválica. En el caso del intervalo de tercera menor (6:5), por ejemplo, puede comprobarse como el sincronismo entre las dos series armónicas no se produce hasta el armónico 30 de la serie físico-armónica básica, que resulta ser el quinto de la serie armónica 6 y el sexto de la serie 5.



Antes de llegar a ese punto de concordancia, las dos series, al desarrollarse, han ido produciendo diversas combinaciones entre sus armónicos, unas a favor de la consolidación de la tercera menor como relación dominante y otras causantes de “asperezas”, cada vez más pronunciadas.

En concreto, se puede observar una sucesión en la cual todos los armónicos adyacentes, comenzando por la línea armónica 5 producen relaciones de tercera menor:

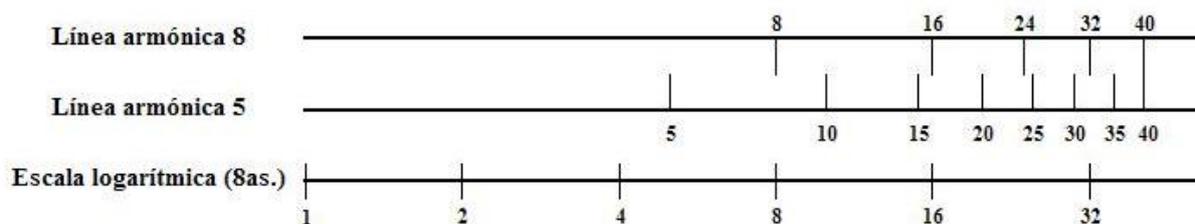
$$\frac{6}{5}, \frac{12}{10}, \frac{18}{15}, \frac{24}{20}, \frac{30}{25}, \dots,$$

Sin embargo, si se relacionan esos mismos armónicos comenzando por la línea armónica 6, se obtiene una sucesión decreciente que tiene a la unidad como límite.

$$\frac{10}{6}, \frac{15}{12}, \frac{20}{18}, \frac{25}{24}, \frac{30}{30}, \dots,$$

En dicha sucesión se puede observar cómo, al ir disminuyendo los intervalos que se forman entre los armónicos de una y otra serie, los roces terminan por producirse dentro de la denominada “banda crítica”, haciendo que el efecto disonante de esos intervalos se incorpore a la estabilidad de la sucesión anterior, formada por terceras menores, rebajando la sensación sonora de estabilidad.

Puede comprobarse que cuanto más se alejan de la unidad los armónicos que se tomen para formar un intervalo, las relaciones entre los armónicos integrantes de cada una de las series se hacen más numerosas y complejas. Es el caso, por ejemplo, del intervalo 8:5, correspondiente a una sexta menor:



Cada línea armónica se desarrolla de tal manera que su punto de sincronismo alcanza el armónico 40 de la serie físico-armónica básica. Tal armónico resulta ser el quinto de la línea armónica 8 y el octavo de la línea armónica 5. Por otra parte, se generan muy variadas relaciones entre sus armónicos componentes que van desde las consideradas como consonantes (la propia sexta menor, la tercera mayor y la menor), como algunas otras de carácter disonante (la séptima mayor o la segunda menor) y otros más, clasificables o no, pero todas ellas por debajo de la “banda crítica”.

Si, de acuerdo a numerosos estudios, se admite que las diferentes y complejas relaciones entre armónicos son la base para establecer la mayor o menor consonancia de un intervalo, también es cierto que el armónico correspondiente a la serie físico-armónica básica en el que se da la concordancia o sincronismo marca un tope, medida o posible grado de consonancia de los diversos intervalos.

Como se ha podido ver en los distintos ejemplos expuestos, el producto del primer armónico de cada una de las líneas armónicas que se relacionan da lugar al armónico de la serie físico-armónica básica en el que son coincidentes. En el caso del intervalo de octava (2:1) se producía en el armónico 2 (2×1), en el ejemplo de la tercera menor (6:5), ocurría en el armónico 30 (6×5), y en el caso de la sexta menor la concordancia se producía en el 40 (8×5), lo que lleva a la obtención de valores similares a los defendidos por el matemático italiano Giovanni Battista Benedetti, en el siglo XVI. A partir de lo expuesto y siguiendo con ese razonamiento es posible efectuar una clasificación de las relaciones entre armónicos o, lo que es lo mismo, de cualquier tipo de intervalo sonoro.

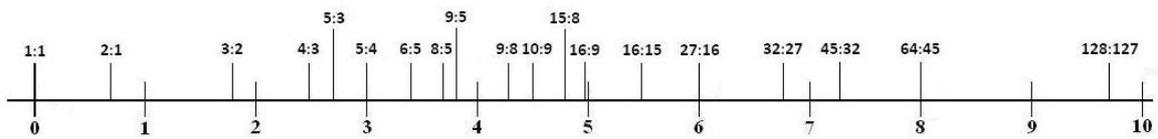
En el estudio que se está desarrollando se ha tomado como punto de partida la interacción entre sí de los 128 primeros armónicos de la serie físico-armónica básica, o del 1, por lo que la relación más lejana que puede establecerse entre los mismos será la correspondiente al armónico 128 consigo mismo. Pero este intervalo aislado nunca nos remitiría a la serie básica del 1, pues al tratarse de una relación de unísono, esa serie básica se formaría a partir del mencionado armónico 128, que pasaría a ser el primero de la misma y frecuencia inicial de 128.

Descartada esta relación, la siguiente, más lejana, sería la que se produce entre los armónicos 127 y 128. Estos dos nos remiten de forma incuestionable a la serie básica o del 1, al tratarse de la relación entre un número primo y un número potencia de dos. Por tanto, siguiendo el criterio anterior de establecer su grado de consonancia o disonancia mediante el producto de ambos, se obtendría un valor de 16256 (128×127). La gama en la que estarán comprendidas todas las relaciones consideradas en el presente estudio irá, entonces, desde el 1 hasta el 16256.

Al objeto de que todas ellas puedan estar comprendidas en una escala más manejable y de valores más reducidos se ha optado por la transformación de las mismas en sus logaritmos naturales, de tal forma que el grado de consonancia-disonancia de la relación de unísono (1:1) pasa a ser representada por el 0 ($\ln 1 = 0$) y la relación 128:127 por 9,70 ($\ln 16256 = 9,69621\dots$).

De los intervalos tratados con anterioridad, la octava (2:1) respondería a un grado de consonancia de 0,7 ($\ln 2 = 0,69314\dots$), la sexta menor (6:5) estaría en un nivel de 3,4 ($\ln 30 = 3,40119\dots$) y la sexta menor (8:5) en 3,7 ($\ln 40 = 3,68887\dots$).

Llevando los valores de estos intervalos y los obtenidos de las relaciones más habituales en la música occidental a una línea donde quede representada esa escala logarítmica natural, se observa la siguiente gradación consonancia-disonancia entre ellos:

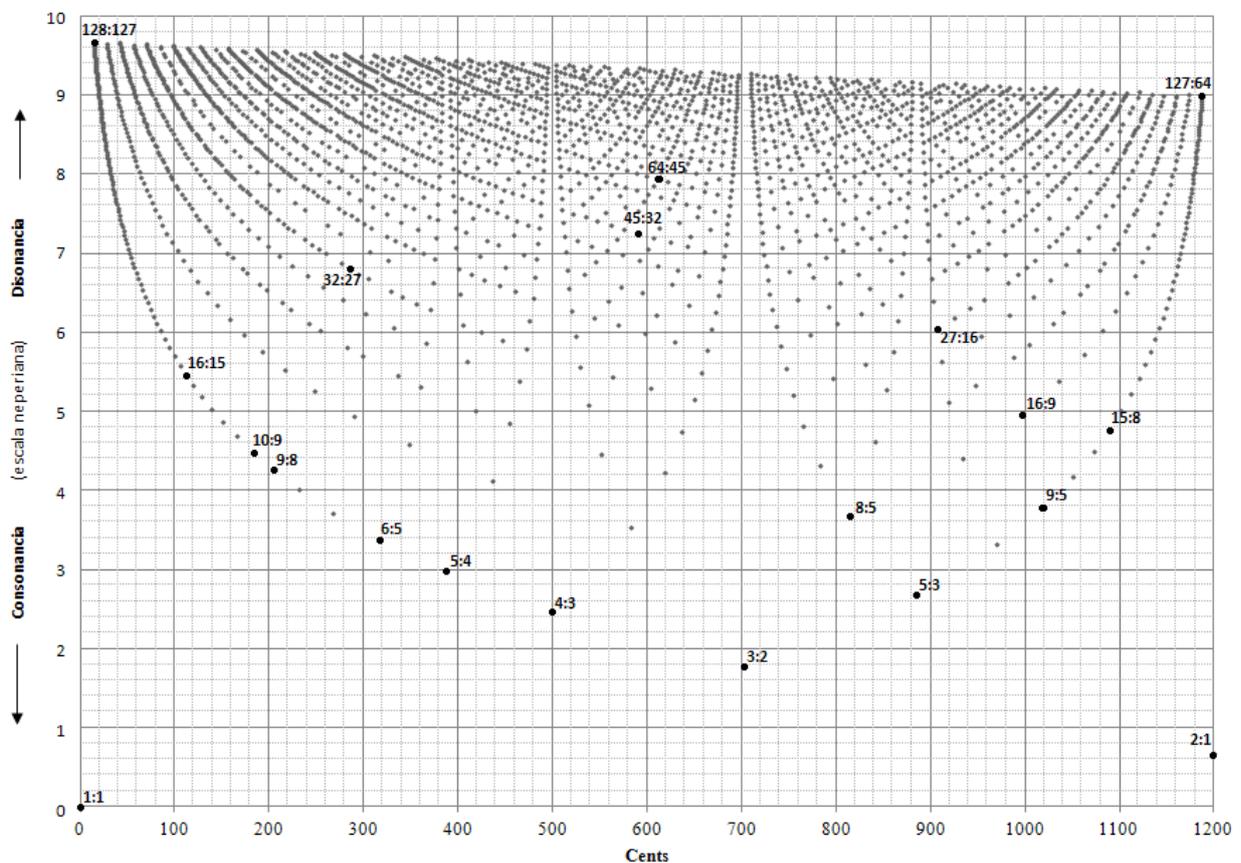


Gradación interválica en función de la consonancia

De la misma forma que los intervalos más comunes de la música occidental han sido clasificados mediante esta propiedad de interacción entre los armónicos de sus series correspondientes, similar procedimiento puede extenderse a las series de todos los demás armónicos considerados.

1.7.- Gradación consonancia-disonancia en el ámbito de la octava.- En el apartado 1.5 se estableció una ordenación de los intervalos conforme a su frecuencia, dentro del ámbito de la octava, creando una escala de medida de 1200 cents, equivalentes a dicho ámbito. Por otro lado, en este último apartado se ha llevado a cabo una ordenación de los intervalos conforme a la interacción de sus armónicos constituyentes, también dentro de ese ámbito de octava. Para sistematizar estos procedimientos al resto de los intervalos que se generan relacionando entre sí los 128 armónicos considerados en el estudio, que dan lugar a intervalos comprendidos dentro de la octava, lo más conveniente es cruzar ambas escalas al objeto de obtener el lugar adecuado para cada uno de ellos en el plano obtenido dentro de un sistema de coordenadas cartesianas.

A tal fin, se mantendrá como eje de abscisas la ordenación de los intervalos según su razón (escala de 1200 cents) y como eje de ordenadas la escala logarítmica neperiana en la que se ha mostrado la gradación de aquellos conforme a su consonancia (puesta en sentido vertical). El siguiente gráfico muestra el resultado obtenido:



Cada punto en el plano corresponde a un intervalo diferente de todos aquellos que pueden formarse dentro del ámbito de la octava mediante el cruzamiento de los 128 armónicos considerados en este estudio.

Ahora puede verse, en su totalidad, una distribución interválica integral que, necesariamente, está formada por puntos y no por líneas continuas como podría ser el caso si no se hubieran utilizado desde un comienzo cantidades discretas, como son los armónicos que se forman a partir de uno básico.

De nuevo, los intervalos más usuales que se vienen representando pueden ahora observarse en su justo lugar, formando parte de un conjunto ordenado según el grado de consonancia de estos. Cuanto más disonantes, más apartados del eje de abscisas aparecen, siendo sus valores, en base a la escala consonancia-disonancia establecida, los que se indican en la tabla siguiente:

Intervalo	Razón	Producto	Valor (escala ln)
Unísono	1:1	1	0
Octava	2:1	2	0,69314 ≈ 0,7
Quinta justa	3:2	6	1,79175 ≈ 1,8
Cuarta justa	4:3	12	2,48490 ≈ 2,5
Sexta mayor	5:3	15	2,70805 ≈ 2,7
Tercera mayor	5:4	20	2,99573 ≈ 3
Tercera menor	6:5	30	3,40119 ≈ 3,4
Sexta menor	8:5	40	3,68887 ≈ 3,7
Séptima menor de tono menor	9:5	45	3,80666 ≈ 3,8
Tono mayor	9:8	72	4,27666 ≈ 4,3
Tono menor	10:9	90	4,49980 ≈ 4,5
Séptima mayor	15:8	120	4,78749 ≈ 4,8
Séptima menor de tono mayor	16:9	144	4,96981 ≈ 5
Semitono mayor	16:15	240	5,48063 ≈ 5,5
Sexta mayor pitagórica	27:16	432	6,06842 ≈ 6
Semitono	32:27	864	6,76157 ≈ 6,8
Cuarta aumentada	45:32	1440	7,27239 ≈ 7,3
Quinta disminuida	64:45	2880	7,96554 ≈ 8

Se ve también que en una primera curva, y formando una sucesión, se encuentran todos aquellos que mantienen una unidad de diferencia entre su numerador y su denominador (2:1, 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, 7:6,...), y, en otra primera curva, aquellos que mientras su denominador crece de uno en uno el numerador lo hace por números impares (1:1, 3:2, 5:3, 7:4, 9:5,...). Otros pocos, de los habituales, aparecen en curvas más internas que, de igual manera, obedecen a una ley concreta de formación, relacionada con todas las demás.

Las dos curvas primeras o principales se cruzan en el intervalo de quinta justa (3:2) y son asintóticas del intervalo de unísono (1:1) y de octava (2:1), respectivamente, al igual que todas las demás, que se desarrollan parejas a ellas. También, en el siguiente gráfico puede observarse como cada punto o intervalo es el límite al que tienden las líneas que discurren desde el unísono o la octava y pasan por sus intervalos adyacentes, continuando su desarrollo indefinidamente en ascenso vertical. Por ejemplo, el intervalo de quinta justa (3:2) es el límite al que tienden las curvas a las que dan lugar las sucesiones:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \dots, \frac{3n-2}{2n-1}, \dots$$

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}, \frac{14}{9}, \dots, \frac{3n-1}{2n-1}, \dots$$

Esta ley de formación indica que el tránsito hacia la consonancia o la disonancia no se produce de forma gradual sino a través de continuos altibajos en las mismas que vendrán determinados por los valores de los intervalos de paso correspondientes. Para hacerse una idea más clara de esto, se muestra a continuación la formación de las primeras relaciones de intervalos que se producen al recorrer el “espacio” comprendido entre el de cuarta justa (4:3) y el de quinta justa (3:2).

Extremos interválicos (relación de inicio y relación final):

$$\frac{4}{3}, \frac{3}{2}$$

Formación intervalo:

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{5}$$

Ordenación de menor a mayor:

$$\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$$

Formación siguientes intervalos:

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{5} = \frac{11}{8}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{10}{7}$$

Ordenación de menor a mayor:

$$\frac{4}{3}, \frac{11}{8}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{3}{2}$$

Formación siguientes intervalos:

$$\frac{4}{3} + \frac{11}{8} = \frac{15}{11}$$

$$\frac{11}{8} + \frac{7}{5} = \frac{18}{13}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{10}{7} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{10}{7} + \frac{3}{2} = \frac{13}{9}$$

Ordenación de menor a mayor, valor de la razón y grados de consonancia:

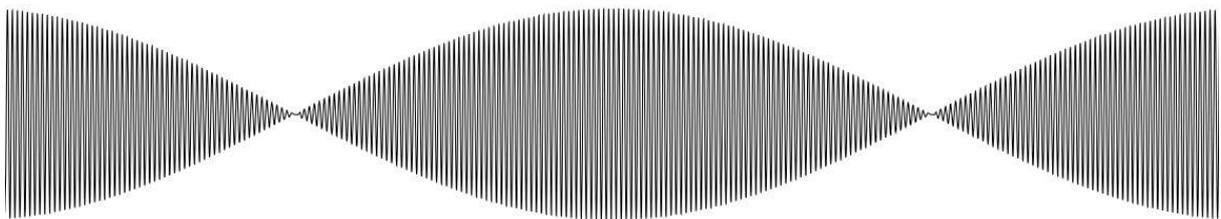
Ordenación: $\frac{4}{3}, \frac{15}{11}, \frac{11}{8}, \frac{18}{13}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \frac{3}{2}$

Valor de la razón: 1,33 1,36 1,37 1,38 1,4 1,41 1,42 1,44 1,5

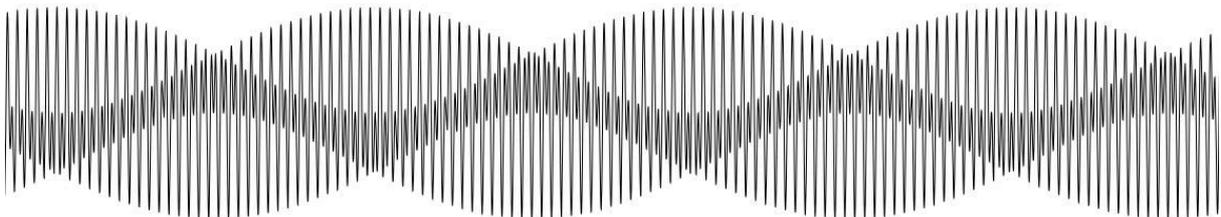
Grado de consonancia: 2,48 5,10 4,47 5,45 3,55 5,31 4,24 4,76 1,79

Se aprecia claramente, al insertar en su justo lugar cada intervalo en función del valor de su razón (frecuencia), como el grado de consonancia-disonancia no sigue un línea creciente o decreciente continua, sino que va fluctuando alternativamente en valores mayores y menores, aunque siempre más disonantes que los intervalos generatrices. Si ampliáramos esta formación hasta límites mucho mayores, podría contemplarse como los intervalos conjuntos a la cuarta justa y a la quinta justa están constituidos por relaciones de armónicos cada vez más lejanos y, en consecuencia y en teoría, cada vez más disonantes, a pesar de que su frecuencia o valor de la razón que los define sea cada vez más cercana a la cuarta justa o a la quinta justa, respectivamente. Esta particularidad es especialmente perceptible en el caso del intervalo de unísono y de octava, donde la cercanía de frecuencias a uno u otro origina los conocidos “batidos” de primer y segundo orden, respectivamente, representados a continuación.

Batidos de primer orden producidos al interaccionar los armónicos 127 y 128 (relación $128:127 = 1,0078$, diferencia de 13,5 cents con respecto al unísono):



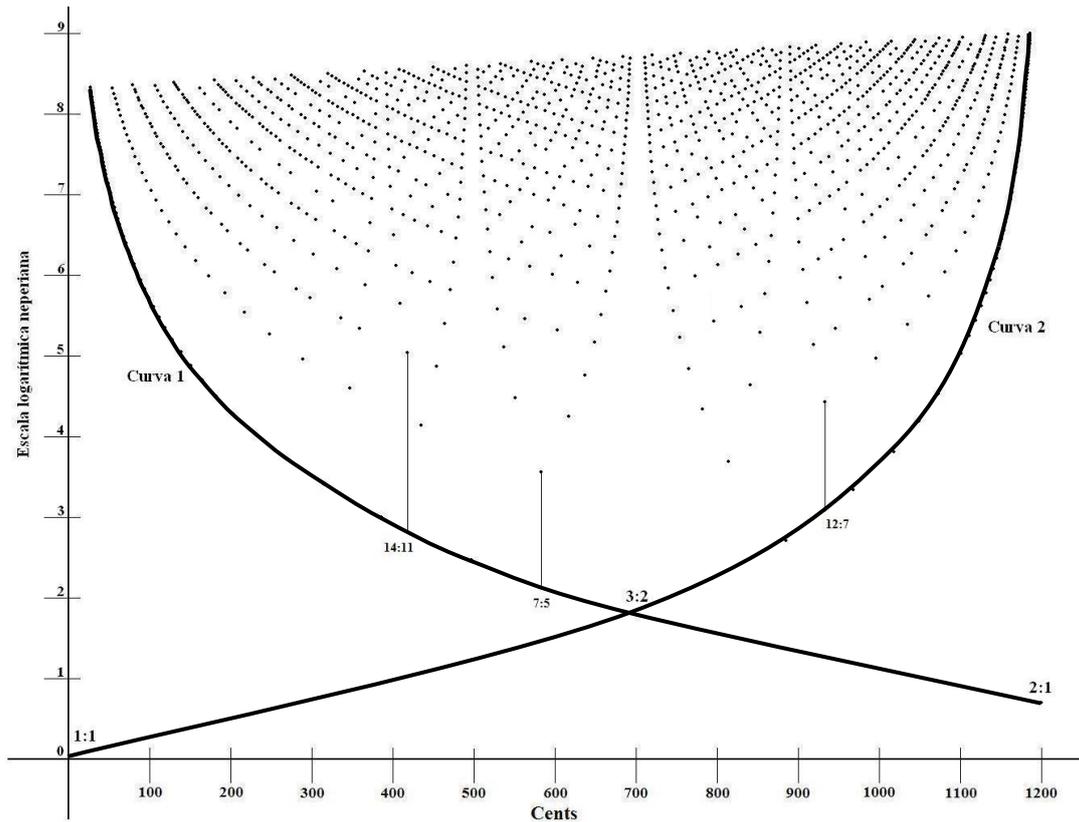
Batidos de segundo orden producidos al interaccionar los armónicos 65 y 128 (relación $128:65 = 1,9692$, diferencia de 27 cents con respecto a la octava):



En la práctica, ese crecimiento de la disonancia irá en aumento hasta alcanzar el límite de discriminación sonora (reconocimiento de diferencia de frecuencias entre dos sonidos) para cada relación o intervalo concreto.

1.8.- Determinación de las ecuaciones de las curvas primarias.- Como la mayor parte de los intervalos utilizados en la música occidental se encuentran situados en las dos primeras curvas, puede ser interesante obtener las ecuaciones de estas, ya que las mismas integran también a todo el resto de valores interválicos posibles si se realiza una proyección de cada punto, generado por cada relación interválica, sobre dichas curvas (así como todos los valores irracionales), aunque queda claro que el grado de consonancia-disonancia de todos esos puntos proyectados ya no sería el previsto por la ley de formación establecida (producto de los armónicos relacionados), como luego se verá.

El siguiente gráfico muestra en trazo grueso las curvas aludidas que, como ya se comentó, tienen su inicio en la octava (2:1) y el unísono (1:1) y se cruzan en el intervalo de quinta justa (3:2), mostrándose también las proyecciones de tres puntos correspondientes a relaciones interválicas tomadas de forma un tanto arbitraria.



Según se vio, la Curva 1, que tiene su comienzo en la octava (2:1), obedece a la sucesión:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

cuyo límite es la unidad (el unísono):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Por definición

$$x_1 = \frac{n+1}{n} \quad y_1 = n(n+1)$$

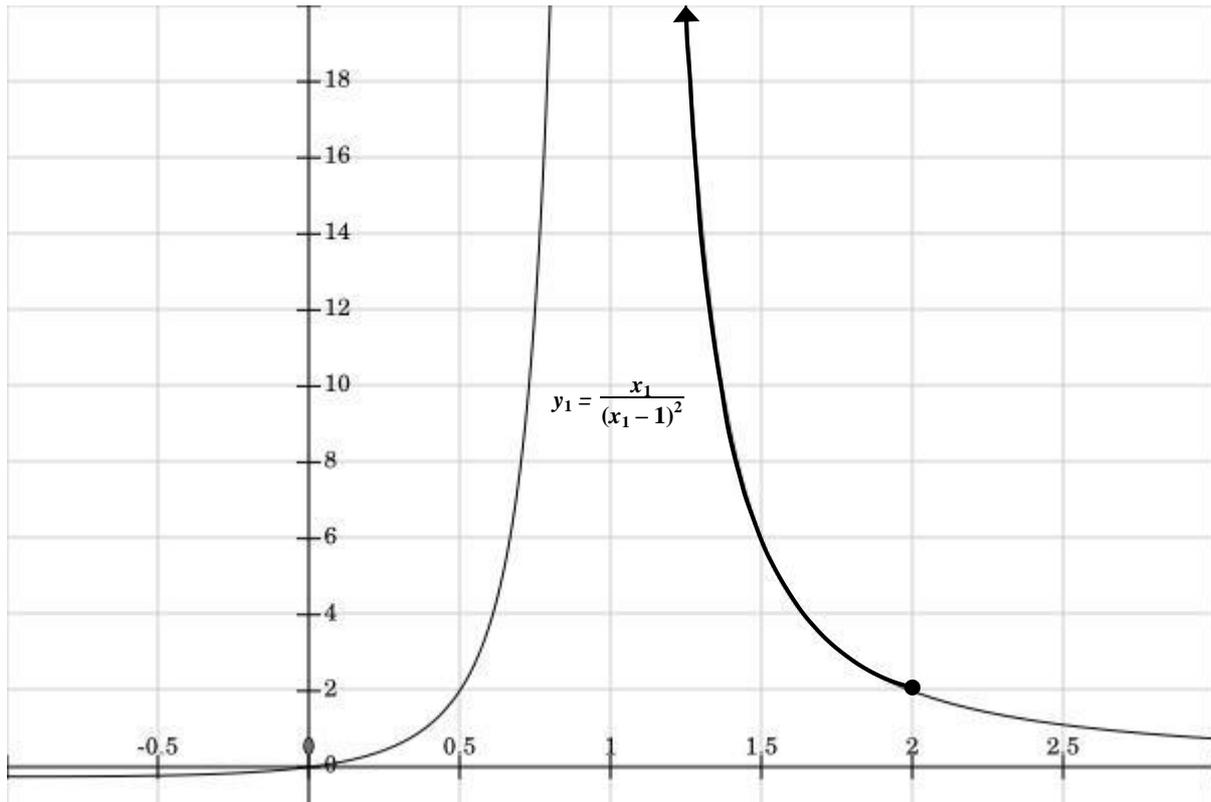
luego

$$n = \frac{1}{x_1 - 1} \quad y_1 = 1/(x_1 - 1)^2 + 1/(x_1 - 1)$$

Simplificando:

$$y_1 = \frac{x_1}{(x_1 - 1)^2}$$

La curva original, al margen de las escalas utilizadas anteriormente (cents y logarítmica natural) viene representada por la gráfica siguiente:



Con trazo grueso aparece el inicio del intervalo de curva, valores de x_1 comprendidos entre 1 y 2, entorno en el que quedan contenidas las relaciones que comenzando en la octava (el 2), van en sentido ascendente y tienen como límite el unísono (la unidad).

La Curva 2, por su parte, tiene comienzo en el unísono (1:1) y obedece a la sucesión:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$$

cuyo límite es 2 (la octava):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

Por definición

$$x_2 = \frac{2n-1}{n} \quad y_2 = n(2n-1)$$

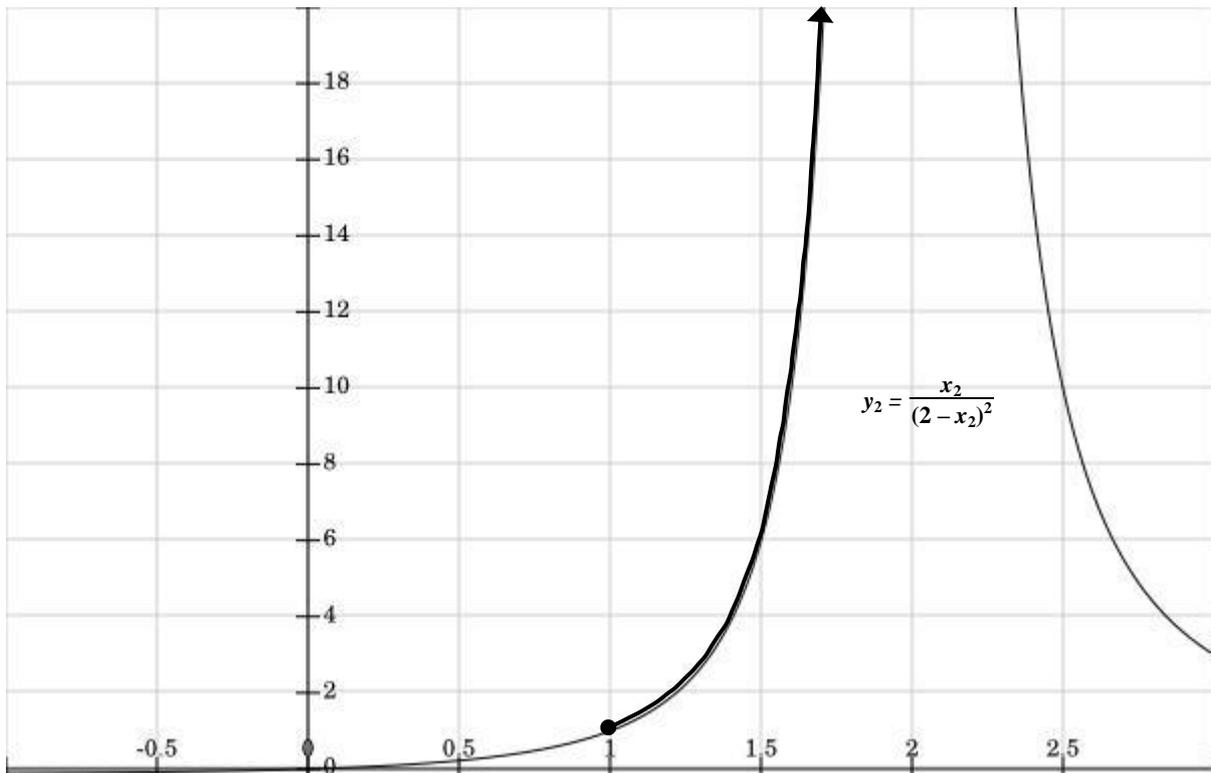
luego

$$n = \frac{1}{2-x_2} \quad y_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2-x_2}\right)^2 + \frac{1}{2-x_2}$$

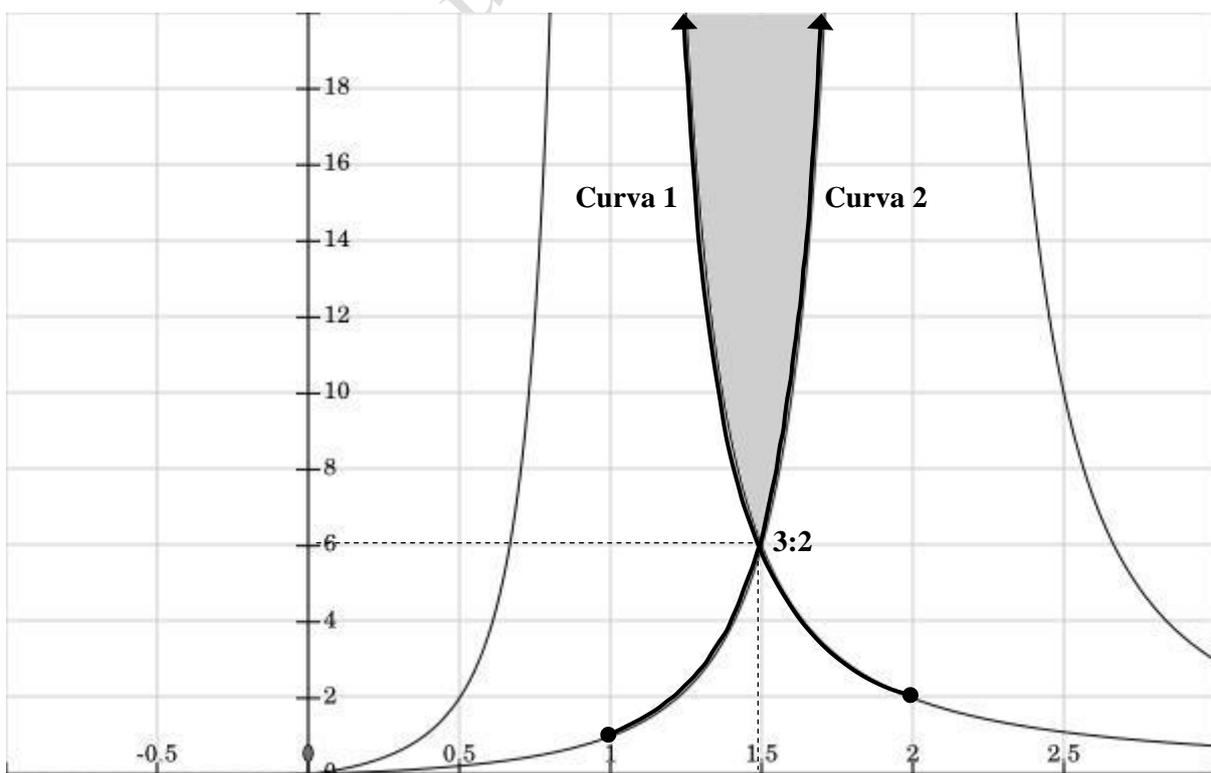
Simplificando:

$$y_2 = \frac{x_2}{(2-x_2)^2}$$

Igualmente, la curva original, al margen de las escalas utilizadas, viene representada por la gráfica siguiente:



Y el trazo grueso se corresponde con el inicio del intervalo de curva, valores de x_2 comprendidos entre 1 y 2, en el que se encuentran las relaciones que, comenzando en el unísono (la unidad) crecen en sentido ascendente acercándose a su límite, la octava (el 2). En la siguiente imagen puede verse la superposición de ambas curvas que interseccionan en el punto (1,5;6), correspondiente a la quinta justa (3:2=1,5) y al producto de los armónicos que la conforman (3*2=6).



La parte sombreada contiene todos los puntos correspondientes a las diversas relaciones interválticas que pueden formarse dentro del ámbito de octava, ocupando cada una su lugar correspondiente, según su valor (frecuencia) y su grado de consonancia-disonancia (producto de los armónicos relacionados).

En el apartado 1.7, al establecerse una correspondencia entre los cocientes y los productos de cada par de armónicos relacionados, al objeto de obtener una gradación interváltica en función de la consonancia, se argumentó, como razón para ello, las interacciones (roces), mayores o menores, que se originan entre los armónicos de los sonidos que se relacionan, así como su sincronismo o concordancia en determinados armónicos, dando por sentado, en consecuencia, de que estábamos ante la comparación de sonidos compuestos, esto es, sonidos constituidos por una fundamental y sus armónicos sucesivos. La escala consonancia-disonancia obtenida entonces, se refiere, por tanto, a ese tipo de sonidos, en su estado más ideal o teórico.

¿Qué sentido pueden tener entonces estas curvas primarias continuas que abarcan todas las relaciones posibles a lo largo de su desarrollo, incluidas aquellas que no tienen que ver con los números naturales?

Como se indicó las sucesiones que daban lugar a su formación eran las siguientes:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$$

que, dentro del ámbito de la octava, son las sucesiones que contienen las relaciones más simples entre los números naturales que forman sus numeradores y denominadores. De ahí que ocupen el nivel más bajo de todas las líneas curvas (de puntos) posibles que aparecen en el gráfico en el que se representa el gradiente interváltico en función de la consonancia.

En ambas curvas, según avanzan las sucesiones, los intervalos van pasando de la mayor consonancia (la octava en la Curva 1 y el unísono en la Curva 2) a la mayor disonancia, hasta llegar hipotéticamente al inalcanzable límite, en el cual la consonancia volvería a ser restablecida (el unísono en la Curva 1 y la octava en la Curva 2).

Pero similar comportamiento en la percepción de la consonancia se produce cuando los sonidos que se relacionan son simples o, dicho de otra forma, sinusoidales. Está demostrado, mediante exhaustivos experimentos, que el oído humano, al tratar con sonidos simples, percibe como consonancia todas aquellas relaciones que, obtenidas mediante un barrido de frecuencias, se encuentran por encima de una tercera menor (6:5) y por debajo de una sexta mayor (5:3). O sea, se obtiene, una gama continua de consonancias, con independencia del intervalo, que de forma progresiva van hacia la disonancia conforme los intervalos disminuyen hacia el unísono, produciéndose los batidos de primer orden, o aumentan acercándose a la octava, dando lugar a batidos de segundo orden.

Las Curvas 1 y 2 ofrecen esas mismas características, por lo que las ecuaciones que las definen bien podrían describir el comportamiento auditivo de los sonidos puros o sinusoidales a efectos de consonancia-disonancia.

Si esta analogía es válida, el índice de consonancia de cada relación interváltica, no comprendida dentro de las sucesiones que dan lugar a las curvas primarias descritas, se obtendría mediante la proyección perpendicular, desde el punto que las define, sobre una de las dos curvas primarias, según que el valor de la relación sea menor o mayor que la quinta justa (3:2), (ver gráfico de la página 15).

De esta manera, todos los intervalos formados por números naturales e inscritos en las curvas primarias (octava, quinta justa, cuarta justa, tercera mayor, tercera menor,...), mantendrán su mismo

grado o índice de consonancia bien estén formados por sonidos sinusoidales o sonidos compuestos. Por el contrario, las relaciones pertenecientes a curvas superiores verán variar su grado de consonancia según se trate de sonidos simples o compuestos. Por poner un ejemplo, la relación 7:5, mostrará un índice de consonancia de 3,55 (logaritmo natural del producto de los armónicos constitutivos del intervalo) si estamos ante sonidos compuestos; pero, si los sonidos que lo generan son sinusoidales, se encontrará su grado de consonancia haciendo uso de la ecuación de la Curva 1:

$$y_1 = \frac{x_1}{(x_1 - 1)^2}$$

ya que el valor del intervalo 7:5 es igual a 1,4, perteneciente a un punto de la misma. Luego:

$$y_1 = \frac{(7/5)}{((7/5) - 1)^2} = 8,75$$

siendo el logaritmo natural (o grado de consonancia) de y_1 igual a 2,17. Existe pues una diferencia sustancial si el intervalo lo forman sonidos compuestos (grado de consonancia=3,55) o sinusoidales (grado de consonancia=2,17). Mientras que en el primer caso el grado de consonancia se ajusta al producto de los armónicos, en el segundo toma un valor, cuatro veces menor, ocupando un lugar "intermedio" entre los intervalos de quinta (grado de consonancia=1,79) y de cuarta justa (grado de consonancia=2,48). Si, como ya se ha comentado, los intervalos por debajo de una tercera menor (grado de consonancia=3,40) comienzan a considerarse como disonantes, nos encontraríamos en que un mismo intervalo, tal cual es el caso de 7:5, bien puede ser reconocido por el sistema auditivo como disonante o consonante dependiendo de que esté formado por sonidos compuestos o sinusoidales.

1.9.- Consonancia-disonancia fuera del ámbito de la octava.- En el apartado 1.7, al mostrar en un gráfico la gradación interválica en función de la consonancia, dentro del ámbito de la octava, se podía observar la formación de dos curvas primarias en donde estaban comprendidas las sucesiones

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$$

que, cortándose en el punto correspondiente al intervalo de quinta justa (3:2), integraba en la superficie delimitada por ambas a todos los demás comprendidos dentro dicho ámbito.

Siguiendo la dirección ascendente (hacia la disonancia), marcada por la primera de ellas, se pueden trazar curvas similares que engloben a otras series de intervalos que, a su vez, forman parte de otras sucesiones que pueden considerarse análogas.

Así, partiendo del intervalo 5:3, se puede formar la sucesión

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}, \frac{13}{11}, \dots, \frac{2n+3}{2n+1}, \dots$$

en la que puede observarse fácilmente su procedencia real, que no es más que la sucesión

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{n+2}{n}, \dots$$

en la que los términos pares (4:2, 6:4, 8:6,...) al ser intervalos pertenecientes a la sucesión primaria han sido absorbidos por la misma, faltándole también el primer término, 3:1 (ver gráfico página siguiente).

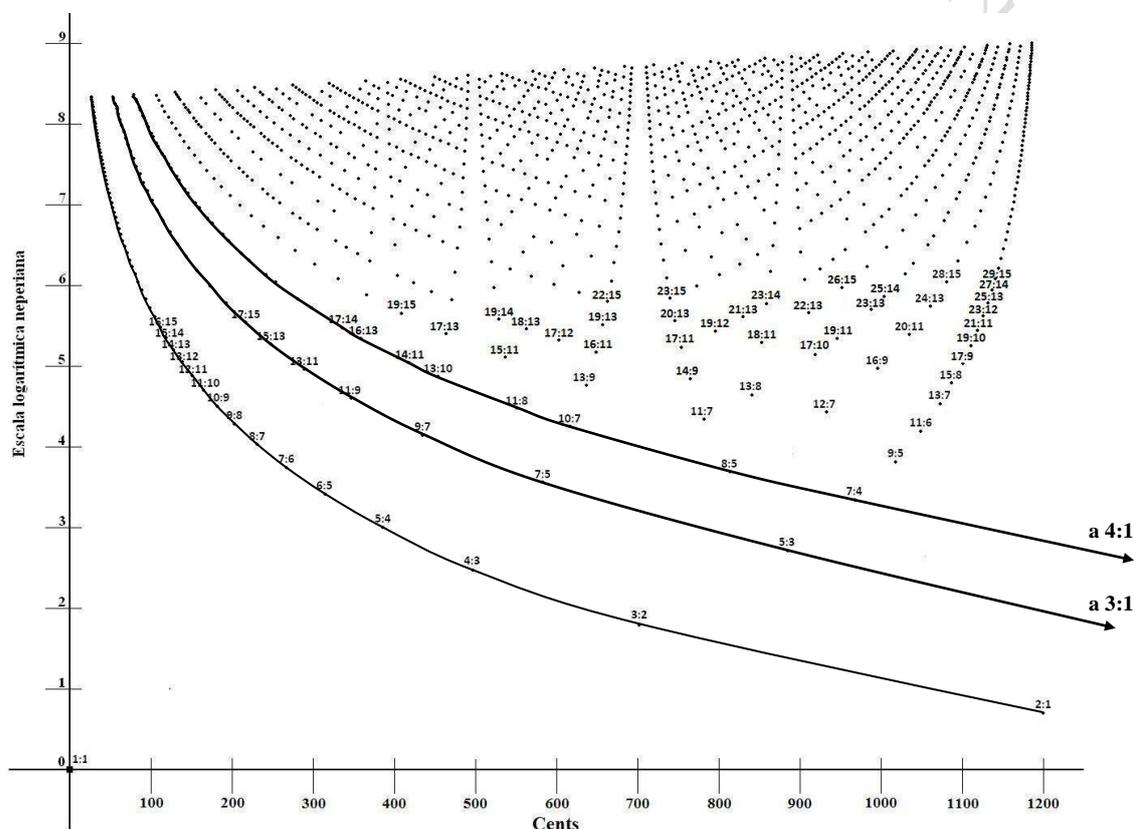
Si realizamos esta misma operación a partir del intervalo 7:4 puede establecerse una nueva sucesión, en este caso, aparentemente irregular:

$$\frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{7}, \frac{11}{9}, \frac{13}{11}, \dots$$

que no es más que una reducida e incompleta de la sucesión

$$\frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \dots, \frac{n+3}{n}, \dots$$

Estas sucesiones, que pueden verse remarcadas mediante líneas curvas en el gráfico siguiente, junto con la primaria, contienen términos que, al despejar su valor, resultan mayores que los correspondientes al ámbito de la octava.



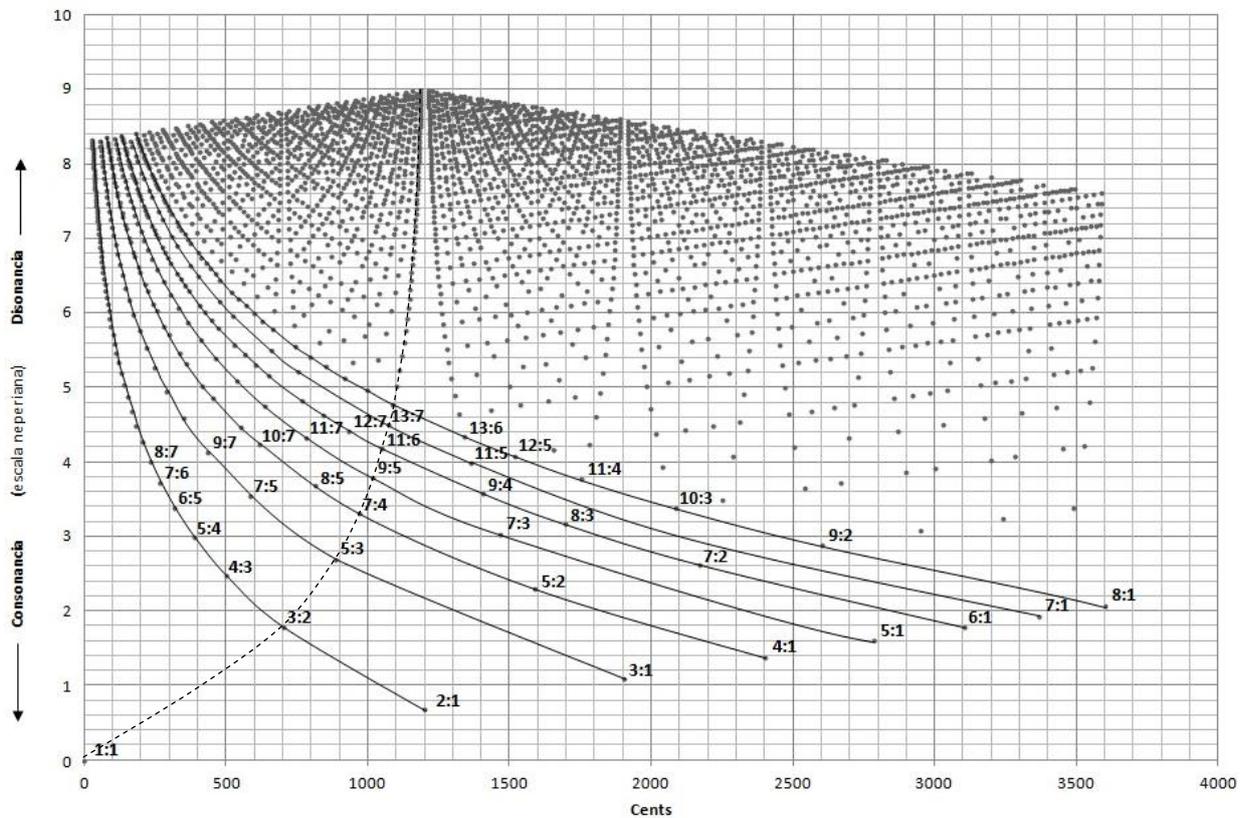
Así, la relación 3:1, con el que comienza la sucesión siguiente a la primaria, nos remite a un intervalo de quinta justa (3:2) más una octava (2:1):

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$$

De la misma manera ocurre con los intervalos de la línea tercera, 4:1 y 5:2, cuyo valor se corresponde con una doble octava y una tercera mayor más una octava, o undécima mayor.

Haciendo una generalización de lo apuntado al resto de las sucesiones que conforman líneas que convergen hacia la unidad, o el unísono, como límite, se obtienen sucesivamente mayor cantidad de intervalos o relaciones que exceden del ámbito de la octava y se extienden a lo largo de las siete consideradas en este estudio.

El siguiente gráfico muestra la hipotética gradación interválica en función de la consonancia en el ámbito de tres octavas, apareciendo los intervalos de las primeras siete sucesiones, de la 2:1 a la 8:1, unidos por líneas curvas.



Como puede apreciarse, los puntos o intervalos correspondientes a la segunda línea primaria que aparecería al considerar únicamente el ámbito de la octava (1:1, 3:2, 5:3, 7:4, 9:5,...), han sido integrados, excepto el 1:1, en todas estas curvas, que tienen por característica un primer término cuyo numerador pertenece, en orden creciente, a la serie de los números naturales y como denominador a la unidad, en todas ellas, y que responden a la ecuación general:

$$y_N = N^2 \frac{x_N}{(x_N - 1)^2}$$

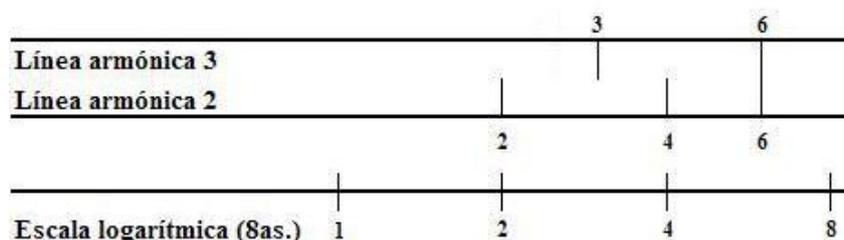
tomando x_N valores iguales o mayores que uno, siendo N un elemento perteneciente al conjunto de los números naturales y representando el subíndice N a los valores que toman x e y en la curva de orden igual al elemento N).

Sin embargo, el procedimiento utilizado hasta ahora para obtener el índice de consonancia de los intervalos (logaritmo neperiano del producto del numerador por el denominador de la relación entre armónicos), al hacerlo extensivo a los intervalos compuestos, trae consigo determinadas paradojas que no pueden pasarse por alto. Un ejemplo muy evidente al respecto puede ser la comparación entre el índice de consonancia de una segunda mayor (9:8), que sería $\ln(9 \cdot 8) = 4,28$, y una tercera menor más dos octavas (24:5), que sería $\ln(24 \cdot 5) = 4,78$ y, por tanto, más disonante. No parece, evidentemente, que el oído acepte esos resultados. El intervalo de segunda mayor es, sin duda, más disonante que la tercera menor más dos octavas, lo que pone en entredicho la forma seguida hasta aquí para determinar el grado de consonancia o disonancia de los intervalos al extenderlo a todo el conjunto sonoro.

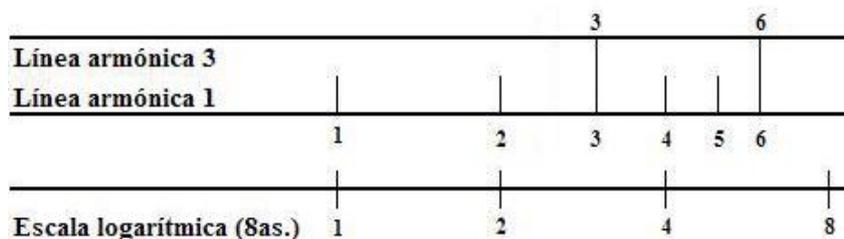
1.10.- Gradación interválica en función de la consonancia fuera del ámbito de la octava.- Existe un consenso general, al tratar los aspectos de la consonancia más allá del límite de la octava, de

considerar los intervalos compuestos absolutamente análogos en su percepción a sus homólogos simples. Quiere esto decir, por ejemplo, que la respuesta sensorial producida por una octava (2:1), en lo que respecta a su grado de consonancia, se mantendrá inalterable si lo escuchado es una doble octava (4:1), triple octava (8:1), etc. De la misma manera ocurrirá con un intervalo de quinta justa (3:2), de cuarta justa (4:3), o de cualquier otro, contenido dentro de un sistema musical o no, por lo que todo estudio sobre la consonancia queda de inmediato reducido a conocer y explicar las sensaciones producidas dentro de ese reducido ámbito del espectro sonoro.

Si bien esto parece ser cierto para diversidad de intervalos (la octava entre ellos) existen otros, dentro de los más comunes, que no parecen seguir esta convencional y aceptada pauta. Según ella, el intervalo de quinta justa, como se ha dicho, no sufre tampoco ningún tipo de diferenciación perceptiva bien se trate de una quinta justa real (3:2) o de una quinta justa ampliada (6:2, o quinta justa más octava). Si realizamos un análisis esquemático de la interacción armónica de cada uno de esos intervalos, podremos apreciar, sin embargo, alguna diferencia importante.



En el gráfico precedente se ha representado la interacción producida dentro del intervalo de quinta justa (3:2). Puede observarse como existe un roce o choque entre el primer armónico de la línea armónica del 3 y el segundo armónico de la línea armónica del 2, originándose una relación 4:3, o de cuarta justa entre ambos que, necesariamente, “emborronará” la percepción limpia de la relación 3:2 y de la 6:4 mientras se alcanza el armónico 6, común a ambas líneas.



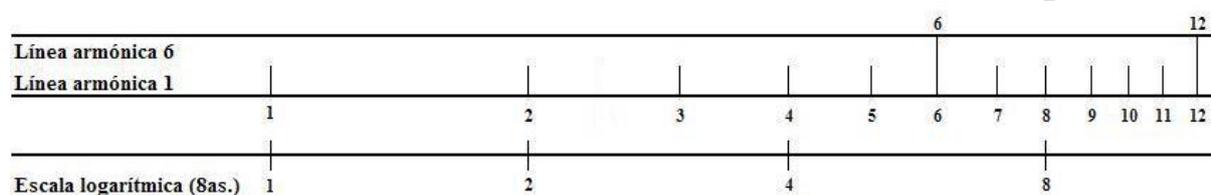
En este segundo gráfico, correspondiente a un intervalo de quinta justa más octava (3:1), puede observarse como no hay ningún tipo de interacción armónica, antes de alcanzar el armónico común 3, susceptible de provocar cualquier roce que ponga en entredicho la percepción de un intervalo de quinta justa, pues las relaciones que se producen no hacen más que afianzarlo, 3:1 y 3:2. Por otra parte, las relaciones que pudieran ocasionar las asperezas (4:3, 5:3 y 6:5) quedan por detrás del asentamiento del armónico común de ambas líneas armónicas y, por lo tanto, fuera del interés perceptivo del sistema auditivo, que parece tener como referencia primordial esa primera sincronización. Pero lo más importante es que cualquier armónico de la línea armónica 3 tiene su correspondencia con uno de la línea armónica 1, como no podría ser de otra forma, lo que pone de manifiesto la dependencia absoluta de aquella línea respecto a la principal, manifestándose, en este caso, como una línea extraída de ella.

También es de interés observar que, mientras en el intervalo de 3:2 su fundamental absoluta, el armónico 1, está una octava por debajo del primer sonido real, en el 3:1 son coincidentes esa fundamental con el primer sonido real del intervalo. Además, mientras que en la relación 3:1 todos los armónicos de la línea armónica 3 son comunes con la línea armónica 1, en el caso del intervalo 3:2

esto no ocurre ya que hace su aparición el armónico 4 que pertenece de forma exclusiva a la línea armónica del 2.

Así, la percepción de dichos intervalos, el de 3:2 (quinta justa) y el de 3:1 (quinta justa más octava) no pueden provocar la misma sensación de consonancia, al margen de la diferenciación en tésituras que dichos intervalos conlleva para el oído. Y, atendiendo a todo lo expuesto con anterioridad, habrá que reconocer que el intervalo 3:1, en el que existe una coexistencia pacífica entre armónicos, resulta más consonante que el intervalo 3:2, en el cual está presente el roce 4:3, ya mencionado. Si aplicamos el procedimiento habitual para obtener el grado de consonancia a ambos intervalos, da como resultado que el intervalo de 3:2 tiene un grado de consonancia de 1,79 (logaritmo natural del primer armónico común), y el de 3:1 un grado de consonancia de 1,09 (o $\ln 2$ menos).

Siguiendo con esta ampliación interválica, dentro del intervalo de quinta justa, el siguiente en formarse sería el correspondiente a dicho intervalo más dos octavas, o sea, 6:1. Realizando su gráfico de desarrollo armónico tendríamos el siguiente resultado:

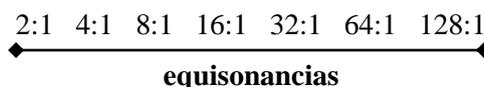


Del mismo, se deduce que el intervalo 6:1 (quinta justa más dos octavas) tiene las mismas características que el 3:1 en cuanto a la completa dependencia de la línea armónica 6 a la principal 1. Ni en una ni en otra relación existen realmente roces o interferencias entre armónicos. Tanto la línea armónica 3 como, en este caso, la 6 no son más que una serie de armónicos amplificados constitutivos de la línea armónica principal, o 1. De aquí que, a efectos de consonancia-disonancia, tengamos que aceptar que no hay variación alguna entre los intervalos 3:1 (quinta justa más octava) y 6:1 (quinta justa más dos octavas).

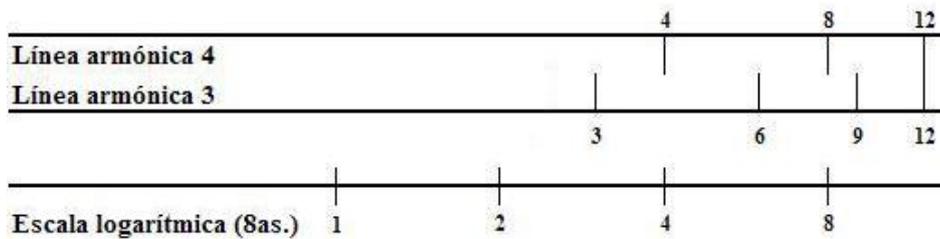
Entonces, según lo comentado, el intervalo de quinta justa (3:2) responde a un grado de consonancia de 1,79 mientras que toda la gama de intervalos a la cual pertenece (3:1, 6:1, 12:1, 24:1, 48:1 y 96:1), que comprende un registro de siete octavas, responderán a un grado de consonancia de 1,09. La quinta justa (3:2) es, pues, más disonante que todos sus intervalos compuestos derivados, en los cuales se mantiene el mismo grado de consonancia, que pueden ser clasificados por esta circunstancia como equisonantes.

De ahí que no pueda realizarse el cálculo del índice de consonancia según el criterio establecido de antemano. Todos los intervalos compuestos cuyo numerador esté formado por un armónico más la agregación de una o más octavas a partir del mismo, mantendrán igual grado de consonancia-disonancia que tendría dicho intervalo si tal octava u octavas de más no existieran.

La gama de los intervalos de octava es en la que mejor queda reflejada esta particularidad, ya que todos ellos resultan ser equisonantes, con un índice de consonancia de $\ln(2*1) = 0,70$, correspondiente a una octava (2:1).

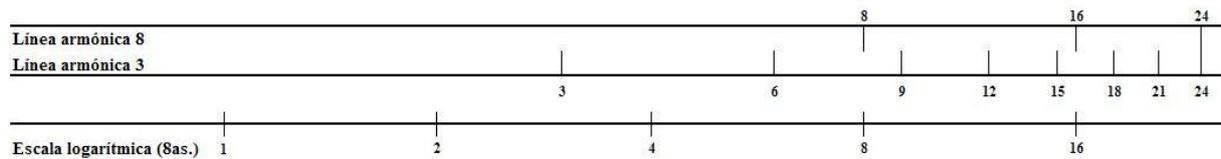


Ocurre lo mismo con la gama del intervalo de cuarta justa (4:3). En el siguiente gráfico aparece su desarrollo armónico:

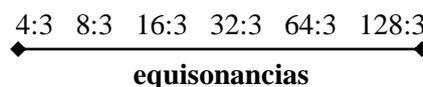


Puede apreciarse como se producen relaciones que confirman al intervalo (4:3, 8:6, 12:9), así como otras que tienden a desfigurarlo (6:4, 9:8), hasta que se alcanza el armónico, de frecuencia 12, común para ambas líneas armónicas. Según el procedimiento utilizado su grado de consonancia-disonancia es de 2,48, más disonante, pues, que su intervalo inverso, la quinta justa ($\ln 2$ más disonante). Por otra parte, hay que tener en cuenta para explicaciones posteriores que la línea armónica 4 es una subordinada o reducida de la serie básica, o del 1.

Si queremos ampliar el intervalo 4:3 para convertirlo en compuesto no hay más solución que mover hacia arriba, en una octava o más, la línea armónica superior, ya que el movimiento de la línea armónica inferior en una octava daría como resultado la existencia de un armónico igual a 1,5, cosa del todo imposible según lo establecido al comienzo de este estudio, basado en una serie físico-armónica básica formada por los números naturales. Por tanto, el intervalo compuesto más próximo de una cuarta justa será ese mismo intervalo más su octava, o sea 8:3.



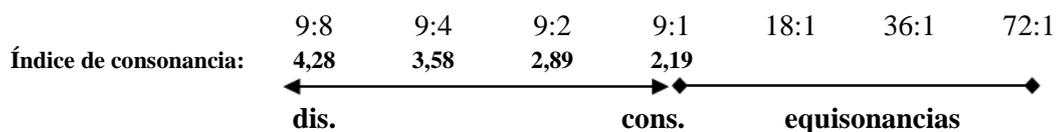
Pero como ocurría en el caso del intervalo 3:1, los armónicos que forman la línea armónica 8 son también constitutivos de la línea armónica 4 en su totalidad, que a su vez lo es de la serie básica, con lo cual el grado de consonancia será idéntico tanto para el intervalo 4:3 como para el 8:3 (2,48), así como para todos los intervalos compuestos más amplios pertenecientes a la gama de la cuarta justa (16:3, 32:3, 64:3 y 128:3). Todos ellos son, pues, equisonantes con un índice de consonancia de $\ln(4*3) = 2,48$.



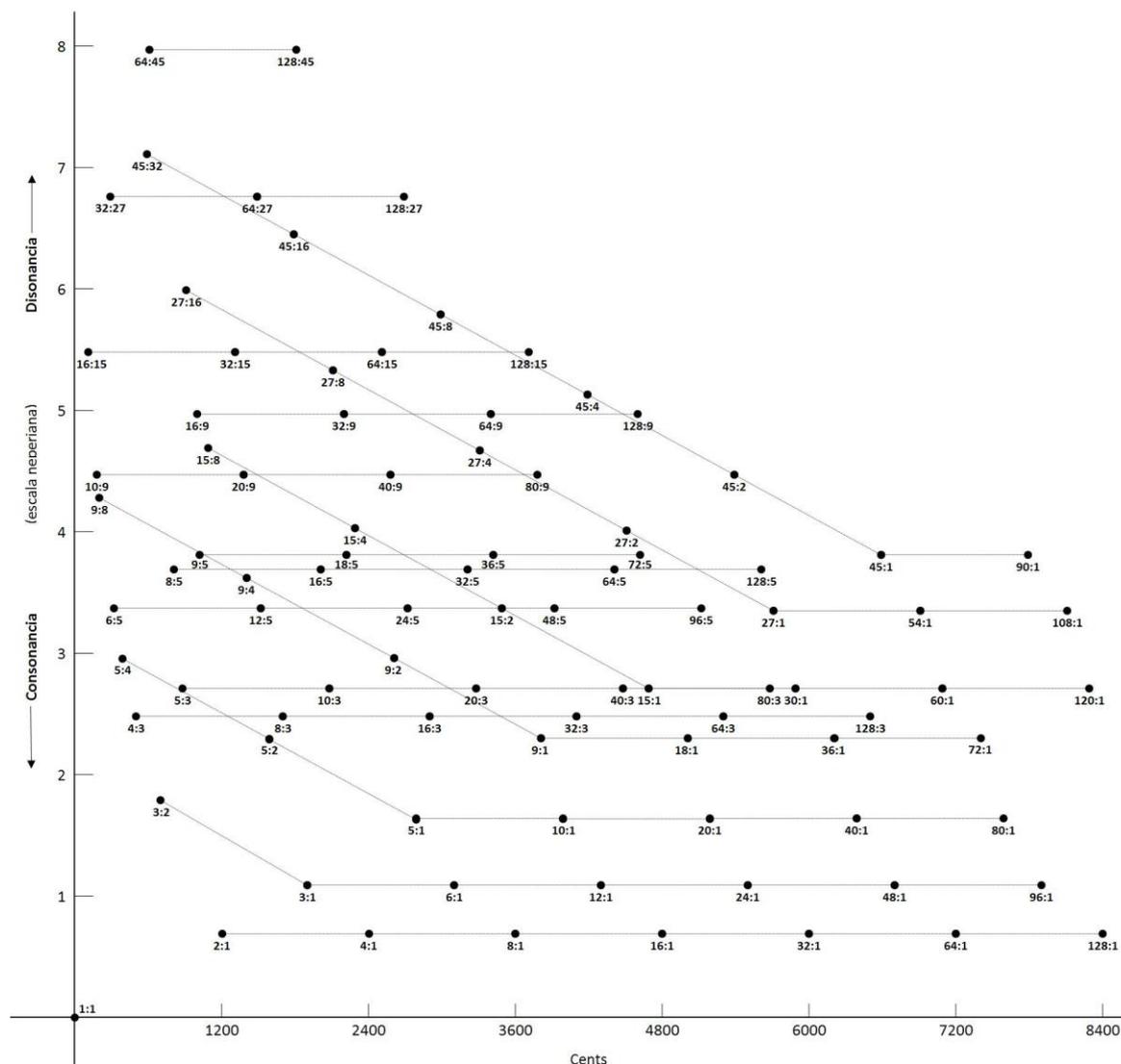
Siguiendo estos nuevos criterios analicemos el intervalo de segunda mayor (9:8) y la gama de intervalos compuestos a los que da lugar.

Al hacer la ampliación de dicho intervalo en una octava, se obtiene el intervalo 18:8 que reducido se convierte en el 9:4, un intervalo de novena mayor (segunda mayor más octava). Si desde este último ampliamos otra octava se formará el intervalo 18:4 que reducido es el 9:2, una segunda mayor más dos octavas; por último, si a este intervalo le sumamos otra octava se convierte en 18:2, que reducido se transforma en el 9:1, segunda menor más tres octavas. Hasta aquí se han ido obteniendo sucesivos intervalos ampliados a partir del 9:8, teniendo cada uno de ellos su índice de consonancia-disonancia específico de acuerdo a la ley establecida desde un principio. Así el intervalo 9:8 tendrá un índice de $\ln(9*8) = 4,28$, el 9:4 de $\ln(9*4) = 3,58$, el 9:2 de $\ln(9*2) = 2,89$, y el 9:1 de $\ln(9*1) = 2,19$. Se produce, pues, un descenso de la disonancia conforme el intervalo se va ampliando con más octavas. Pero llegados al intervalo 9:1 la única forma de seguir ensanchando el intervalo con octavas sucesivas es ascender desde el armónico 9 a la siguiente octava. Se obtiene así el intervalo 18:1, que consta de una segunda mayor más cuatro octavas y que, de acuerdo a lo establecido con anterioridad, será equisonante con su predecesor. Siguiendo este proceso de ampliación se obtienen, dentro del ámbito

de las siete octavas, los intervalos 36:1 y 72:1, que son también equisonantes con los anteriores. La gama de los intervalos de segunda mayor (9:8) queda establecida entonces de la siguiente manera:



A partir de las reformulaciones que se han realizado al tratar la consonancia-disonancia en los intervalos compuestos, una representación gráfica de la gradación interválica en función de la consonancia de los intervalos más comunes, dentro de la música occidental, es la siguiente:



En él se puede apreciar como la gama de intervalos de octava (2:1) conserva invariable a lo largo del espectro sonoro el índice de consonancia, al igual que la de cuarta justa (4:3), la de tercera menor (6:5) o la de sexta mayor (5:3), y otros. No ocurre lo mismo, sin embargo, con la gama de la quinta justa (3:2), la de la tercera mayor (5:4) o la estudiada segunda mayor (9:8) y algunas otras más, que sufren alteraciones en el índice de consonancia dependiendo de la amplitud del intervalo que se trate. Y pueden observarse verdaderas curiosidades que contradicen las ideas prefijadas o normas establecidas sobre la mayor o menor consonancia de algunos intervalos con respecto a otros.

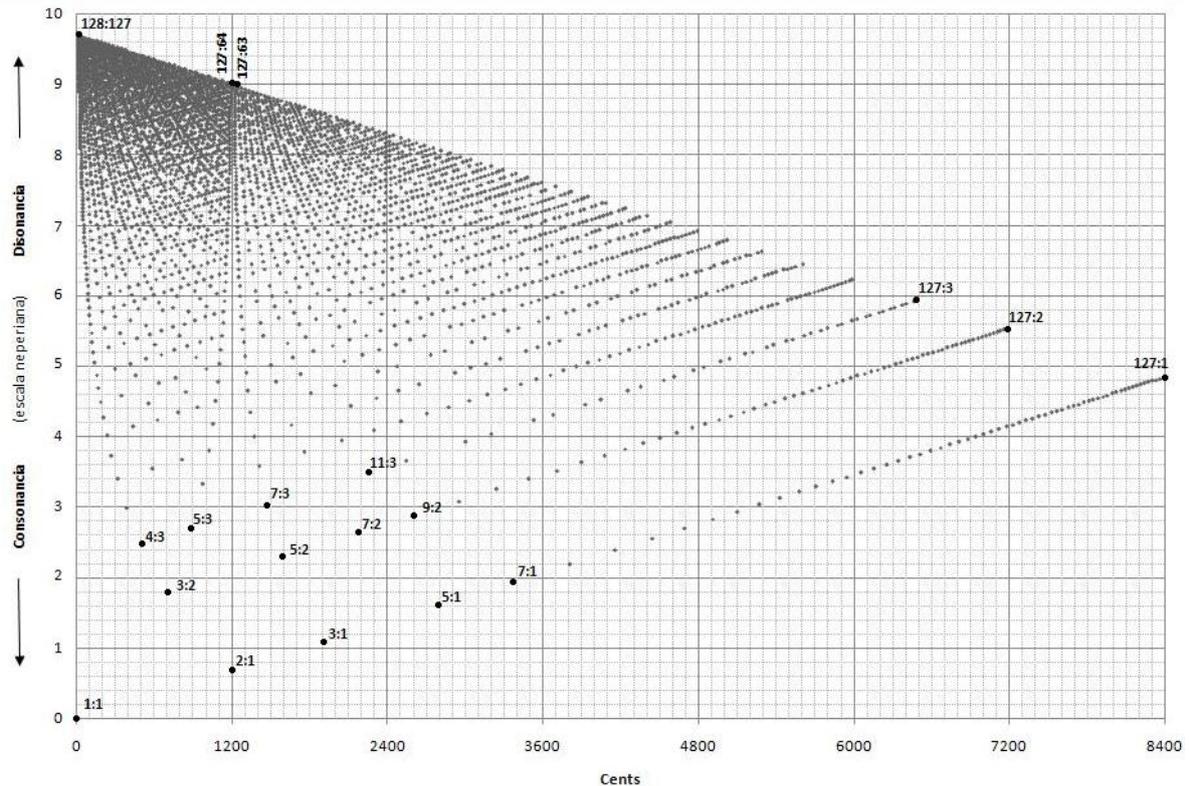
Así, queda de manifiesto que una tercera mayor (5:4) más dos octavas, intervalo 5:1, es algo más consonante que la quinta justa (3:2); que una segunda mayor (9:8) más tres octavas, intervalo 9:1, resulta un poco más consonante que la tercera mayor (5:4) más una octava, intervalo 5:2, y también más consonante que toda la gama correspondiente al intervalo de cuarta justa (4:3) o al de tercera menor (6:5). Todos estos casos en apariencia “anómalos”, y más de los que se pueden percibir en el gráfico, son corroborados, sin embargo, por una audición atenta y exenta de cualquier prejuicio al respecto.

La tabla siguiente muestra de forma ordenada, de la mayor consonancia a la mayor disonancia, los intervalos que aparecen en el gráfico anterior, que, como se viene observando, son los más usuales dentro de la música occidental.

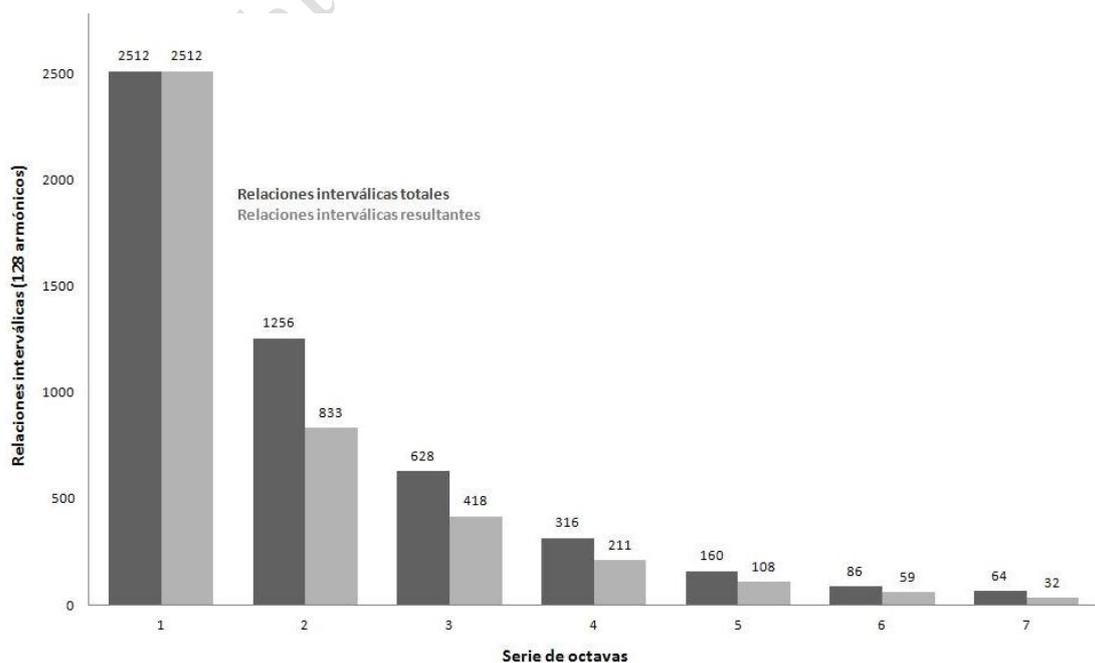
Intervalos	Razón	Índice consonancia
Unísono	1:1	0
Gama de la 8ª	2:1, 4:1, 8:1, 16:1, 32:1, 64:1, 128:1	0,69314 ≈ 0,7
Gama de la 5ª más una 8ª	3:1, 6:1, 12:1, 24:1, 48:1, 96:1	1,09861 ≈ 1,1
Gama de la 3ª mayor más dos 8ªs	5:1, 10:1, 20:1, 40:1, 80:1	1,60943 ≈ 1,6
5ª justa	3:2	1,79175 ≈ 1,8
Gama de 2ª mayor de tono mayor más tres 8ªs	9:1, 18:1, 36:1, 72:1	2,19722 ≈ 2,2
3ª mayor más una 8ª	5:2	2,30258 ≈ 2,3
Gama de la 4ª justa	4:3, 8:3, 16:3, 32:3, 64:3, 128:3	2,48490 ≈ 2,5
Gama de la 6ª mayor	5:3, 10:3, 20:3, 40:3, 80:3	2,70805 ≈ 2,7
Gama de 7ª mayor más tres 8ªs	15:1, 30:1, 60:1, 120:1	2,70805 ≈ 2,7
2ª mayor de tono mayor más dos 8ªs	9:2	2,89037 ≈ 2,9
Tercera mayor	5:4	2,99573 ≈ 3
Gama de la 6ª mayor pitagórica más cuatro 8ªs	27:1, 54:1, 108:1	3,29583 ≈ 3,3
Gama de la 3ª menor	6:5, 12:5, 24:5, 48:5, 96:5	3,40119 ≈ 3,4
7ª mayor más dos 8ªs	15:2	3,40119 ≈ 3,4
2ª mayor de tono mayor más 8ª	9:4	3,58351 ≈ 3,6
Gama de la 6ª menor	8:5, 16:5, 32:5, 64:5, 128:5	3,68887 ≈ 3,7
Gama de la 7ª menor de tono menor	9:5, 18:5, 36:5, 72:5	3,80666 ≈ 3,8
Gama de 4ª aumentada más cinco 8ªs	45:1, 90:1	3,80666 ≈ 3,8
6ª mayor pitagórica más tres 8ªs	27:2	3,98898 ≈ 4
7ª mayor más dos 8ªs	15:4	4,09434 ≈ 4,1
2ª mayor de tono mayor	9:8	4,27666 ≈ 4,3
Gama de 2ª mayor de tono menor	10:9, 20:9, 40:9, 80:9	4,49980 ≈ 4,5
4ª aumentada más cuatro 8ªs	45:2	4,49980 ≈ 4,5
6ª mayor pitagórica más dos 8ªs	27:4	4,68213 ≈ 4,7
Séptima mayor	15:8	4,78749 ≈ 4,8
Gama de la 7ª menor de tono mayor	16:9, 32:9, 64:9, 128:9	4,96981 ≈ 5
4ª aumentada más tres 8ªs	45:4	5,19295 ≈ 5,2
6ª mayor pitagórica más una 8ª	27:8	5,37527 ≈ 5,4
Gama de la 2ª menor	16:15, 32:15, 64:15, 128:15	5,48063 ≈ 5,5
4ª aumentada más dos 8ªs	45:8	5,88610 ≈ 5,9
6ª mayor pitagórica	27:16	6,06842 ≈ 6,1
4ª aumentada más una 8ª	45:16	6,57925 ≈ 6,6
Gama de la 3ª menor pitagórica (semiditono)	32:27, 64:27, 128:27	6,76157 ≈ 6,8
4ª aumentada	45:32	7,27239 ≈ 7,3
Gama de la 5ª disminuida	64:45, 128:45	7,96554 ≈ 8

La línea doble que sirve de separación entre el intervalo de 7ª mayor más dos octavas y el de 2ª mayor de tono mayor más una octava marca la zona de transición entre los intervalos considerados consonantes y los disonantes, y se produce cuando el índice de consonancia-disonancia alcanza un valor de 3,5 aproximadamente. Según esto, todos los intervalos entre 3,5 y 0 pueden ser considerados como gradualmente más consonantes y entre 3,5 en adelante como gradualmente más disonantes. Aunque en teoría el grado de disonancia puede llegar a ser infinito, la realidad es que la capacidad de resolución de frecuencias del oído humano (o su imposibilidad de distinguir entre intervalos diferentes próximos o muy próximos), reduce drásticamente los valores altos del índice de disonancia, como más adelante podrá comprobarse.

También el número de intervalos que tienen un índice de consonancia-disonancia distinto se ha visto limitado, en todo el espectro sonoro considerado, al proceder a la supresión de todos aquéllos compuestos que son equisonantes con otros simples o más cercanos al ámbito de la octava. En el siguiente gráfico, que abarca siete octavas, se representan todos los intervalos que dan lugar a índices de consonancia diferentes una vez que se ha procedido a la supresión de los que resultan equisonantes.



De un total de 5.022 relaciones interválticas distintas que se producen al interaccionar entre sí los 128 armónicos considerados, la supresión de las equisonancias reduce esta cifra a 4.173, lo que hace disminuir la “densidad interváltica” en aproximadamente un 17%, siendo su distribución por octavas la que se puede observar en el siguiente gráfico comparativo.



1.11.- Criba interváltica en función de la resolución de frecuencia del oído humano.- Existe, como no puede ser de otra forma, un límite en la percepción auditiva humana que impide diferenciar sonidos de frecuencias muy cercanas. Quiere esto decir que entre una frecuencia f_1 y otra frecuencia $f_2 = f_1 + \Delta f$ el sentido auditivo no percibirá diferencia alguna cuando el Δf sea lo suficientemente pequeño como para no producir una sensación distinta al enfrentar un sonido con otro.

La resolución de frecuencia está ligada íntimamente con la clase de sonidos que el oído escucha, siendo éste menos resolutivo en los de frecuencias bajas y aumentando en dicha resolución según se asciende por el espectro sonoro, para disminuir después, alcanzadas las frecuencias más altas.

En este estudio han estado presentes desde el comienzo todas las relaciones interválticas generadas por la interacción entre sí de 128 armónicos de una serie básica de fundamental la unidad, lo que ha dado lugar a una ingente cantidad de intervalos que, en muchos casos, resultan tan cercanos entre ellos que se encuentran comprendidos de lleno en el límite de resolución de frecuencia y, por tanto, son equivalentes, a efectos prácticos, a otros que tienen por soporte a armónicos más inferiores, y por tanto resultan más consonantes, dentro de la mencionada serie físico-armónica básica.

Así, por ejemplo, el intervalo $In_1 = 127:106 = 1,198113\dots$, que tiene como soportes a los armónicos 106 y 127, y el intervalo de tercera menor $In_2 = 6:5 = 1,2 = In_1 \times \Delta In$, con soportes en el armónico 5 y en el 6, son muy próximos entre sí, como se ve al obtener el intervalo correspondiente a su cociente, o ΔIn :

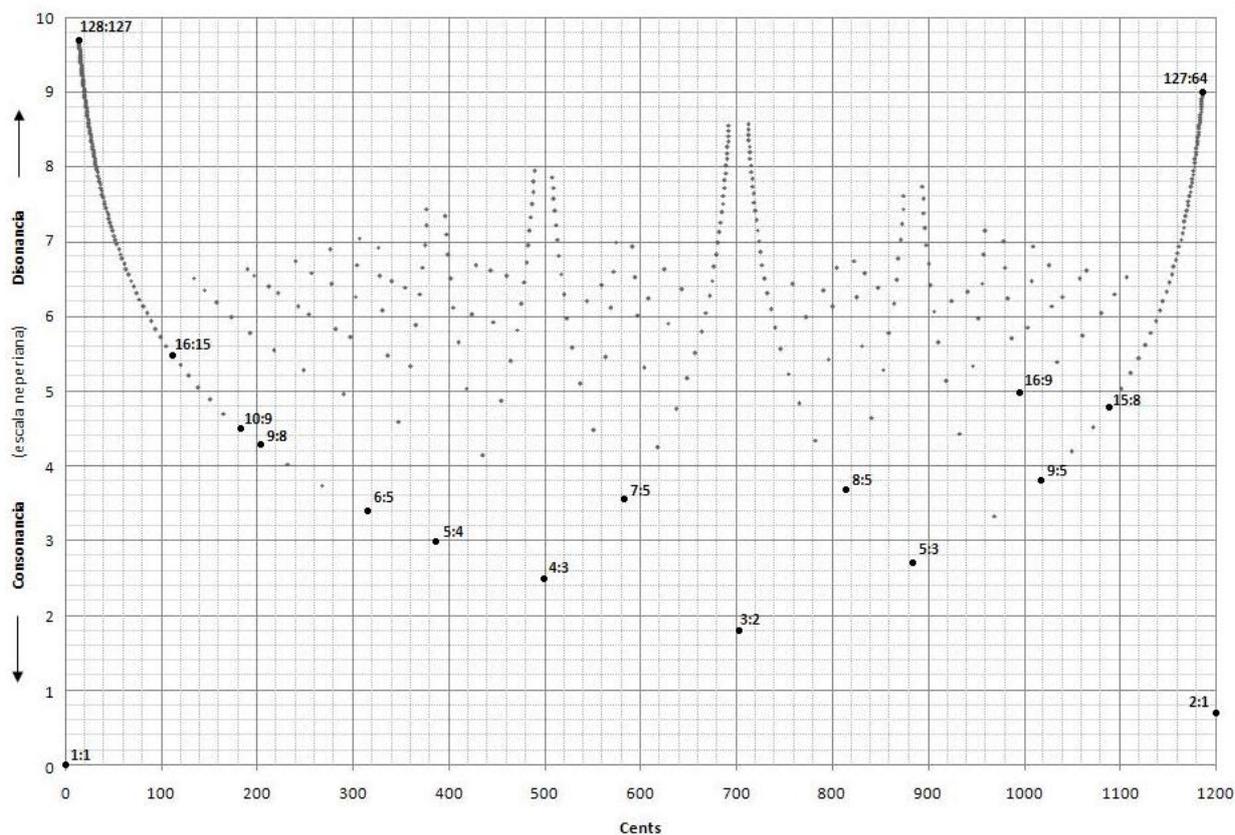
$$\Delta In = \frac{6}{5} : \frac{127}{106} = 1,0015748$$

Este pequeño intervalo resultante, o ΔIn , es de 2,72 cents, lo que equivale a 1/36 aproximadamente de un semitono, por lo que al sentido del oído le será prácticamente imposible reconocer como distintos los intervalos propuestos. Recordemos que la diferencia entre una tercera menor y su correspondiente temperada es de 15,64 cents, bastante mayor que ΔIn , dando el oído por buena la sustitución de una por la otra en la práctica musical.

Aplicando este modo de proceder a todo el ámbito sonoro propuesto, se ha realizado una criba de intervalos en la cual se han mantenido todos aquellos cuya razón viene dada por una relación de armónicos más inferiores o cercanos a la fundamental básica, y se ha elegido como límite para la resolución de frecuencia una diferencia de 10 cents (décima parte de semitono) entre intervalos próximos.

Es preciso decir también que en el entorno del unísono y de la octava las relaciones más cercanas que se forman, considerando 128 armónicos, exceden de ese límite. Así, el intervalo $128:127 = 1,0078$, el más próximo al unísono que se puede obtener, tiene un valor de 13,58 cents, y el $127:64 = 1,9844$, o el $127:63 = 2,0158$, los más cercanos a la octava que se pueden dar, tienen un valor menor y mayor de 13,60 cents, aproximadamente, respecto a aquella. Esta particularidad viene a corroborar la gran sensibilidad del sistema auditivo alrededor del unísono y de la octava, ya que las relaciones interválticas que pudieran simular ese tipo de sensación (la de unísono u octava) tienen que estar constituidas por armónicos muy superiores, mayores a los aquí considerados, y que ya no puedan dar lugar a los conocidos batidos de primero y segundo orden, de los que se trató al final del apartado 1.7. Dentro del ámbito de la octava, esa sensibilidad es también bastante acusada para el intervalo de quinta justa y va descendiendo progresivamente conforme los intervalos van haciéndose más pequeños.

El gráfico siguiente muestra todas las relaciones interválticas que han superado la criba mencionada dentro del estricto ámbito de la octava, siendo su número de 393 de los 2.512 existentes antes de aquella, lo que representa una disminución de la "densidad interváltica" en un 84%, aproximadamente.



Por tanto, el sistema auditivo realiza, debido a una incapacidad resolutive de frecuencia mayor, determinados agrupamientos de los intervalos, según se presentan en sus relaciones armónicas originales, alrededor de un único valor aproximado a ellos y que es coincidente con una relación interválica formada por armónicos lo más cercanos posibles a la fundamental armónica básica.

En el caso del ámbito de la octava los niveles más altos de consonancia se obtienen cuanto más se acercan los valores de los intervalos a los representados por las dos curvas primarias deducidas en el apartado 1.8, por lo que para determinar el índice real de consonancia de cualquier intervalo puede optarse por equipararlo con el más cercano comprendido en alguna de las dos curvas.

Retomando el ejemplo anterior del intervalo 127:106, cercano a una tercera menor, 6:5, tendría, si nos atenemos al procedimiento habitual seguido, un índice de consonancia-disonancia de $\ln(127 \cdot 106) = 9,5$. Ahora bien, si se busca su equiparación con relaciones entre armónicos más inferiores, este índice descenderá de forma muy notable.

El valor de la relación 127:106 es igual a 1,198..., lo que indica que dicho intervalo se encuentra comprendido dentro de la primera de las curvas primarias estudiadas. El origen de esta curva era la sucesión:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

Realizando entonces la equiparación mencionada tenemos que:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{127}{106}$$

$$n = \frac{106}{21} = 5,047$$

Como puede verse el valor de n obtenido es casi igual a 5, lo que, a efectos prácticos, supone equiparar ese intervalo con otro cuyo valor de n sea exactamente 5. Luego:

$$\frac{127}{106} \approx \frac{6}{5}$$

Por tanto, esa diferencia entre intervalos, de 2,72 cents entre uno y otro, como ya se apuntó, permite dar el mismo índice de consonancia-disonancia a ambos intervalos y rebajar, por tanto, la presunta disonancia de 9,5 del intervalo 127:106 a $\ln(6*5) = 3,4$, lo que le equipara al intervalo de tercera menor, 6:5, de características consonantes.

Inciendo en el límite de resolución de frecuencia del sentido auditivo, veamos otro ejemplo, en esta ocasión, con un intervalo que está comprendido dentro de la segunda curva primaria, tal como es 117:73 = 1,6027.

El índice de consonancia-disonancia de dicho intervalo es de $\ln(117*73) = 9,05$, lo que le convierte en disonante. Si buscamos su equiparación con otro intervalo formado por armónicos más próximos a la fundamental básica, podemos utilizar el término enésimo de la sucesión que da lugar a la segunda curva primaria. Este es $(2n-1)/n$.

Luego:

$$\frac{2n - 1}{n} = \frac{117}{73}$$

$$n = \frac{73}{29} = 2,517$$

En este caso, resulta un valor de n comprendido entre 2 y 3, por lo cual parece ser que dentro de esa curva primaria no tiene cabida dicho intervalo o que no es equiparable con ninguno de ellos, como podrían ser los intervalos 3:2 = 1,5 y 5:3 = 1,666, inferior en 115 cents y superior en 68 cents, respectivamente, al intervalo propuesto. Si buscamos ese posible intervalo equiparable, se puede optar por dos procedimientos. El primero consiste en “sumar” los intervalos, con armónicos más cercanos a la fundamental, entre los que se encuentra comprendido dicho intervalo. Así, tenemos:

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Luego parece ser el intervalo 8:5 = 1,6 el más próximo al 117:73 = 1,6027, existiendo una diferencia de 2,96 cents entre ellos. De esta manera puede afirmarse que ambos intervalos son equiparables a efectos de resolución de frecuencia y que, por tanto, el índice real de consonancia-disonancia del intervalo 117:73 es de $\ln(8*5) = 3,69$ lo que le sitúa en una zona próxima a las consonancias, o a las llamadas semiconsonancias, tal como es el intervalo de sexta menor, 8:5.

El otro procedimiento es buscar un número que multiplicado por el valor de n obtenido aproxime el resultado a un número natural. En este caso, si multiplicamos el valor de $n = 2,517$ por 2, obtenemos 5,034 que bien podría equipararse con el número natural 5. Luego a n se le asignará el valor de 5. Variando el término enésimo de la sucesión para ajustarlo a ese posible valor de n , tenemos:

$$\frac{2n - 2}{n} = \frac{117}{73}$$

$$n = \frac{146}{29} = 5,034 \approx 5$$

Y, sustituyendo en el término n de la sucesión actual, se obtiene el intervalo 8:5 como el mejor ajustado al intervalo propuesto.

Ambos procedimientos, pueden hacerse extensivos a todo el ámbito del espectro sonoro al objeto de eliminar las relaciones interválticas que puedan equipararse a otras pertenecientes a las curvas primarias o a otras curvas lo más próximas a estas.

El término general para todas las sucesiones que dan lugar a las curvas representadas en el gráfico del apartado 1.9 es:

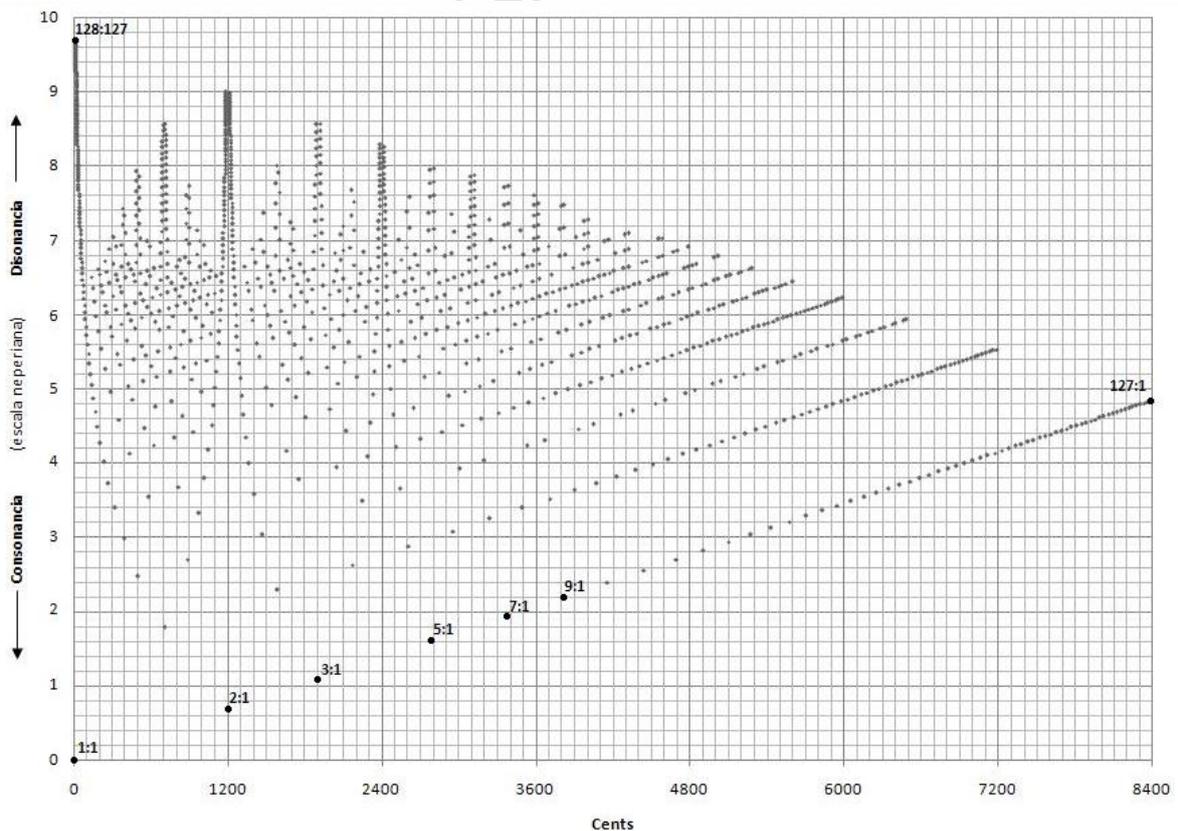
$$In = \frac{n + N}{n}$$

donde In representa al intervalo, simple o compuesto, del cual se quiere obtener su homólogo más cercano a la consonancia formado por armónicos inferiores; n representa el término n ésimo de la sucesión y N un número natural cuyo valor dependerá de la curva donde el intervalo resultante tenga su ubicación. Si consideramos, por ejemplo, el intervalo $119:22 = 5,40909$, se tiene que:

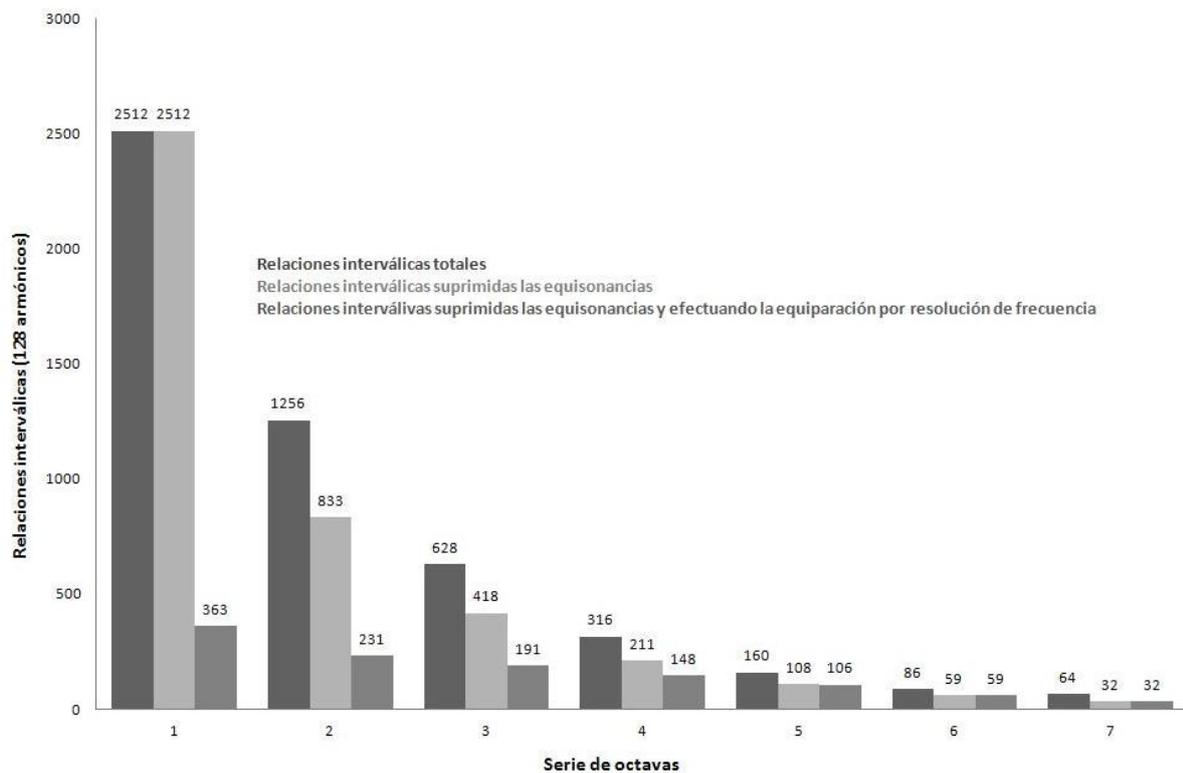
$$In = \frac{119}{22} = 5,40909 = \frac{n + N}{n}$$

$$N = \frac{97n}{22}$$

Dando valores naturales a n , de 1 en adelante, obtenemos para $n = 5$ un valor de $N = 22,045$, lo más cercano a un número natural. De aquí podemos extrapolar que el intervalo que se busca es el $27:5 = 5,4$. La diferencia entre ambos es de 2,91 cents, lo que les hace prácticamente semejantes. El siguiente gráfico representa en cada punto y a lo largo de siete octavas todos los intervalos que no son reducibles a otros, según los criterios establecidos al comienzo del apartado (diferencia de 10 cents), de tal forma que su nivel de disonancia disminuya apreciablemente.



A lo largo de los dos apartados últimos se ha podido comprobar como los intervalos que se originan al relacionar entre sí los 128 primeros armónicos de una serie físico-armónica, de origen la unidad, se ven muy reducidos prácticamente en su número al tener presentes las equisonancias y la resolución de frecuencia. A fines meramente estadísticos se ha realizado el siguiente gráfico, en el que puede apreciarse la disminución de intervalos, en cada una de las siete octavas representadas, teniendo en cuenta, en primer lugar, la criba por equisonancias (columnas gris claro) y, en segundo, esta y la correspondiente a la resolución de frecuencia (columnas medio grises). De un total de 5.022 intervalos teóricos se ha pasado a 1.130 reales, lo que equivale a un descenso de la “densidad interválica” de un 81,5%, aproximadamente, dentro de los límites que se establecieron de antemano.



1.12.- Consonancia y disonancia en los sistemas de justa entonación y temperado.- Una vez estudiadas la consonancia y la disonancia de una forma teórica, partiendo de la interacción de los 128 armónicos comprendidos en el ámbito de siete octavas, quizá sea de utilidad mostrar cómo se aplican las reglas establecidas en el terreno práctico de los sistemas musicales, ya que de este modo podrán quedar aclaradas algunas cuestiones no del todo explicadas a lo largo de los apartados anteriores.

Para ello se va a tratar de la consonancia y disonancia de los intervalos comprendidos en los dos sistemas musicales occidentales en vigor, como son el de justa entonación, utilizado por los intérpretes de instrumentos de alturas indeterminadas, y el temperado, usado por los intérpretes de instrumentos de alturas fijas.

La imagen siguiente representa un teclado convencional a la izquierda del cual se han añadido una serie de columnas con los siguientes datos:

- En la columna primera, empezando por la izquierda, se encuentran especificadas las frecuencias en hertzios correspondientes a cada nota del teclado. Aproximadamente, hacia el centro de esa columna aparece remarcada la frecuencia de 440 Hz que es coincidente con la nota LA del registro C4, o A4 Como puede verse la nota más grave, inicio del teclado, es un LA de 27,5 Hz y la más aguda un DO de 4.186,01 Hz.

4186,01	4186,01	0	C8	Do	128	
3951,07	3924,00	+11,9		Si	120	
3729,31				La s./Si b.		
3520,00				La		
3322,44			Sol s./La b.			
3135,96	3139,20	-1,79	Sol	96		
2959,96	2943,00	+9,95	Fa s./Sol b.	90		
2793,83			Fa			
2637,02	2616,00	+13,85	Mi	80		
2489,02			Re s./Mi b.			
2349,32	2354,40	-3,74	Re	72		
2217,46			Do s./Re b.			
2093,00	2093,00	0	Do	64		
1975,53	1962,00	+11,9	Si	60		
1864,65			La s./Si b.		5ª disminuida	
1760,00			La			
1661,21			Sol s./La b.			
1567,98	1569,60	-1,79	Sol	48		
1479,97	1471,50	+9,95	Fa s./Sol b.	45		
1396,91			Fa			
1318,51	1308,00	+13,85	Mi	40	4ª aumentada	
1244,50			Re s./Mi b.			
1174,65	1177,20	-3,74	Re	36		
1108,73			Do s./Re b.			
1046,52	1046,52	0	Do	32		
987,76	981,00	+11,9	Si	30		
932,32			La s./Si b.			
880,00			La			
830,60			Sol s./La b.			
783,99	784,80	-1,79	Sol	24		
739,98			Fa s./Sol b.			
698,45			Fa			
659,25	654,00	+13,85	Mi	20		
622,25			Re s./Mi b.			
587,33	588,60	-3,74	Re	18		
554,36			Do s./Re b.			
523,25	523,25	0	Do	16	2ª menor	
493,88	490,50	+11,9	Si	15		
466,16			La s./Si b.			
440,00			La			
415,30			Sol s./La b.			
391,99	392,40	-1,79	Sol	12		
369,99			Fa s./Sol b.		7ª menor de tono mayor	
349,22			Fa			
329,62	327,00	+13,85	Mi	10	7ª mayor	
311,12			Re s./Mi b.			
293,66	294,30	-3,74	Re	9	tono menor	
277,18			Do s./Re b.		tono mayor	
261,62	261,62	0	Do	8		
246,94			Si			
233,08			La s./Si b.			
220,00			La			
207,65			Sol s./La b.			
195,99	196,20	-1,79	Sol	6	6ª menor	
184,99			Fa s./Sol b.			
174,61			Fa		3ª menor	
164,81	163,50	+13,85	Mi	5		
155,56			Re s./Mi b.			
146,83			Re		3ª mayor	
138,59			Do s./Re b.			
130,81	130,81	0	Do	4	6ª mayor	
123,47			Si			
116,54			La s./Si b.		4ª justa	
110,00			La			
103,82			Sol s./La b.			
97,99	98,10	-1,79	Sol	3		
92,49			Fa s./Sol b.			
87,30			Fa			
82,40			Mi		5ª justa	
77,78			Re s./Mi b.			
73,41			Re			
69,29			Do s./Re b.			
65,40	65,40	0	Do	2		
61,73			Si			
58,27			La s./Si b.			
55,00			La			
51,91			Sol s./La b.			
48,99			Sol			
46,24			Fa s./Sol b.		8ª justa	
43,65			Fa			
41,20			Mi			
38,89			Re s./Mi b.			
36,70			Re			
34,64			Do s./Re b.			
32,70	32,70	0	Do	1		
30,86			Si			
29,13			La s./Si b.			
27,50			La			

- En la columna segunda se encuentran los valores en hertzios correspondientes a notas afinadas según el sistema de entonación justa, notas que se corresponden con los armónicos de una serie físico-armónica que tiene como fundamental el DO de 32,70 Hz o C1. Cada valor sucesivo de los representados coincide con un determinado armónico de dicha serie. Como puede observarse, al comparar entre sí los valores temperados con los de justa entonación, ahí donde están emparejados, existe una coincidencia de frecuencias en la primera nota, DO de 32,70 Hz, y en todas las octavas sucesivas. Cualquier otra nota tiene un valor de frecuencia distinto según el temperamento en que se considere que está afinada.
- En la columna tercera aparece, expresada en cents, la diferencia existente entre la afinación temperada y la de justa entonación ahí donde existe una correspondencia entre ambas. El signo + indica que ese intervalo es mayor en el sistema temperado y el signo -, al contrario.
- En la cuarta columna están marcados los siete registros, C1 a C8 de la nota DO, en su nomenclatura habitual, al objeto de que sirva de referencia para explicaciones posteriores.
- En la quinta columna aparecen los nombres de todas las notas del teclado en su denominación convencional, las teclas blancas con las notas de la escala de Do Mayor y las negras con sus dos nombres enarmónicos más usuales.
- Por último, en la columna que representa al teclado, propiamente dicho, se han marcado algunas de las teclas con distintos números. Estos indican qué teclas o notas son armónicos de una fundamental básica que tiene como frecuencia 32,7 Hz, que es la correspondiente a la nota DO o C1. Así, todos los sonidos correspondientes a las notas señaladas son armónicos de esa fundamental, al menos en lo que respecta al sistema de justa entonación.

Partiendo, pues, de esa nota DO de 32,7 Hz, tomada como fundamental, se despliegan una serie de armónicos que tienen su resonancia en determinadas notas y que crean entre ellos diversos intervalos constitutivos de un sistema musical armónico concreto, como es el de justa entonación.

Los intervalos que se forman figuran a la derecha del teclado en su lugar único posible y no existen ningunas otras teclas en la cuales dichos intervalos puedan formarse al no ser cambiando la fundamental básica elegida. Quiere esto decir, por ejemplo, que el intervalo de tercera menor, 6:5, que se forma con las notas MI (E5) y SOL (G5) es el único de todos los posibles que tiene como fundamental la nota DO (C1). Se podría argumentar que la tercera menor de la octava superior, MI (E6) – SOL (G6), también posee esta misma fundamental, pero esto no es cierto al no ser que la fundamental mencionada suene al mismo tiempo que dicho intervalo; en ese caso, no habría duda de que esa nota, la nota DO (C1) sería su fundamental armónica y esas notas sus armónicos 10 y 12; pero si no se hace presente, entonces la fundamental armónica será la nota DO, de 64,14 Hz, del registro C2, incluso aunque no suene. El mismo caso se da si descendemos en octavas. Una tercera menor formada por las notas MI (E4) y SOL (G4) no puede tener la nota DO (C1) como fundamental. Esta tiene que ser, forzosamente, la nota DO del registro C0, de 16,35 Hz, ausente ya, por demasiado grave, del teclado convencional. Esto viene a corroborar la mayor dificultad de reconocer la consonancia de los intervalos propiamente consonantes o semiconsonantes (a excepción de las octavas y las quintas justas), cuanto más cercanos se producen estos al registro sonoro inferior, ya que sus fundamentales armónicas caen, casi inevitablemente, fuera del límite auditivo (alrededor de 20 Hz) lo que a nivel sensorial se traduce en una clara desorientación perceptiva.

El despliegue de los armónicos de la fundamental DO (C1) afecta a 29 notas, incluida la propia fundamental, de las 88 que componen el teclado, lo que quiere decir que el resto de las notas responderá a otras fundamentales armónicas distintas de la utilizada. Por ejemplo, si el intervalo de segunda menor, o semitono, 16:15, que se asienta sobre las notas SI (B4) y DO (C5), con fundamental armónica en C1, se traslada a otras notas del teclado, como pudieran ser MI (E5) y FA (F5), la que resulta ahora ser fundamental armónica es la nota FA (F1), cuyos armónicos estarán desplegados a lo largo del teclado y correspondiéndose con notas que, obviamente, pueden ser armónicos, de distinto

orden, de una o más fundamentales. Así, el MI (E5) es el armónico 15 de la fundamental FA (F1), pero también es el armónico 20 de la fundamental DO (C1).

Observando los intervalos, con sus nombres y los armónicos que los forman, a lo largo del teclado, queda patente que todos ellos se establecen a partir de los 16 primeros armónicos de la fundamental, si exceptuamos la cuarta aumentada y la quinta disminuida que, de modo un tanto singular, tienen sus soportes en los armónicos 32 y 45, y 45 y 64, respectivamente. De esos 16 armónicos antedichos quedan excluidos del sistema el 7, 11 y el 13, ya que no entran a formar parte de ninguno de los intervalos del sistema de justa entonación.

Pero volviendo sobre los intervalos de cuarta aumentada y de quinta disminuida, y su formación con armónicos tan alejados de los demás, hay que hacer notar algo de interés y que tiene que ver también con la resolución de frecuencia del oído humano.

Si, como en ocasiones anteriores, intentamos hallar un intervalo equiparable al de cuarta aumentada, por ejemplo, formado por armónicos más cercanos a la fundamental, recurriremos a igualar este con la expresión ya mencionada $(n + N)/n$.

$$In = \frac{45}{32} = 1,40625 = \frac{n + N}{n}$$

$$N = \frac{13n}{32} = 0,40625$$

Dando valores naturales a n , de len adelante, obtenemos para $n = 5$ un valor de $N = 2,031$, lo más cercano a un número natural. De aquí podemos extrapolar que el intervalo que se busca es $7:5 = 1,4$. Si se obtiene la diferencia entre el intervalo de cuarta aumentada, $45:32$, y el obtenido, $7:5$, puede comprobarse que esta es de 7,71 cents, por lo que, a efectos de sensación de consonancia-disonancia, ambos pueden ser equiparables. Luego, el índice de consonancia del intervalo de cuarta aumentada lo podemos situar en $\ln(7*5) = 3,55$, prácticamente en la línea divisoria que marca el paso de las consonancias a las disonancias.

El carácter tradicionalmente esquivo de este intervalo y el de su complementario, la quinta disminuida, cuyo grado de consonancia puede situarse, por razones análogas, en $\ln(10*7) = 4,24$, su dificultad de clasificación y melódica y armónicamente tratados siempre con muchas reservas en la música tonal, se debe, precisamente, a su relación con el armónico 7 y al hecho de que sea únicamente en estos intervalos donde el mismo aparece dentro del sistema de justa entonación, aunque tal intervención haya sido por norma negada o ignorada. Con esto no quiere decirse que, desde un punto de vista estrictamente teórico, las funciones armónicas de la cuarta aumentada ($45:32$) y de la quinta disminuida ($64:45$) se supediten al armónico 7 y a su relación con el 5 y el 10. Por lo que se refiere a la funcionalidad armónica de ambos intervalos son sus relaciones originales, y por tanto los armónicos que les sirven de soporte, las que habrá que considerar en cualquier caso, aunque sus grados de consonancia sí se hayan visto afectados por su equiparación con los armónicos 5, 7 y 10.

También es necesario advertir que en el desarrollo de cualquier acontecimiento musical, sea melódico o armónico, siempre se producirán ambivalencias armónicas de los sonidos según vayan estos avanzando melódicamente o engarzándose unos con otros formando acordes, por lo que habrá otros armónicos superiores (propios siempre del sistema utilizado) que entrarán en juego al pasar de una fundamental armónica a otra, siendo estas transmutaciones armónicas las que, a fin de cuentas, irán produciendo las tensiones y distensiones a lo largo de todo el discurso musical.

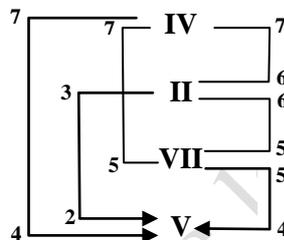
Existe otra cuestión relacionada con el armónico 7 en el que conviene detenerse, aunque no esté estrictamente ligada al tema principal de este estudio como es el de la consonancia-disonancia, y es el relativo a su consideración como séptima menor por muchos teóricos, formando un tándem junto a los armónicos 4, 5 y 6. Según esto se formarían, entre esas cuatro notas los intervalos de séptima menor

($7:4 = 1,75$), el de quinta disminuida ($7:5 = 1,4$, del que ya se ha comentado) y el de tercera menor ($7:6 = 1,16\dots$), aparte de los que forman entre sí los otros armónicos: quinta justa ($3:2$), tercera mayor ($5:4$) y tercera menor ($6:5$).

Lo primero que debe quedar claro, como ya se dijo, es la ausencia absoluta de este armónico tanto dentro del sistema pitagórico como en el de justa entonación. Por otra parte la séptima menor y la tercera menor son considerablemente más bajas, 27,26 cents menor, que la séptima menor de tono mayor ($16:9$) y de la tercera menor pitagórica ($32:27$) y muchísimo más pequeña, 48,77 cents que la tercera menor de la justa entonación ($6:5$). Esto inhabilita ya de por sí al armónico 7 dentro de los sistemas mencionados, aunque ello no imposibilita que pueda figurar en otros de diferentes características.

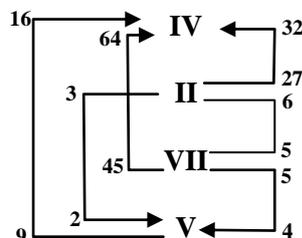
Pero hay otra cuestión más profunda que le hace desmerecer como constitutivo de una séptima menor efectiva.

Si se forma un acorde con los cuatro armónicos sucesivos, 4, 5, 6 y 7, desde un punto de vista armónico se puede definir tal acorde como de séptima de dominante, al estar constituido por una tercera mayor, una quinta justa y una séptima menor. Pero, si es así, ¿dónde se encuentra su funcionalidad armónica, propia de un acorde tan valorado como tenso y resolutivo?



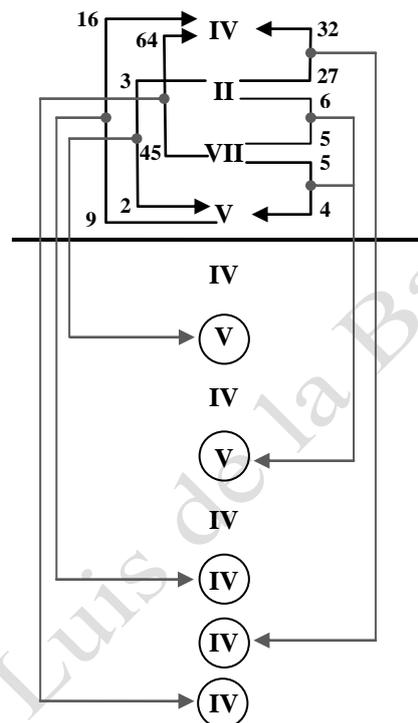
El gráfico representa al mencionado acorde y los intervalos que se forman entre sus cuatro sonidos constitutivos. Puede verse que todos ellos tienen una única fundamental armónica, como no puede ser de otro modo, y que esta se encuentra a dos octavas inferiores del primero de ellos. Es un acorde que no necesita resolver en ningún otro, puesto que ya está resuelto en lo que se refiere a su contexto armónico. Incluso, el índice de consonancia-disonancia de sus intervalos, por separado, no excede el valor 3,55, que produce la supuesta quinta disminuida entre el grado VII y el IV, pues realmente se trata de una cuarta aumentada, lo que revela su gran estabilidad en ese otro aspecto y, por tanto, de un acorde absolutamente estático. En definitiva, el querer emparentar al armónico 7 con la producción de séptimas es como pretender asegurar que el armónico 3 produce terceras y el 5 quintas, en sus relaciones con la fundamental armónica.

Si se analiza un acorde de séptima de dominante formado dentro del sistema de entonación justa, se pueden distinguir notables diferencias:



Los intervalos que lo constituyen son los de séptima menor de tono mayor ($16:9$) entre el V y IV grados, quinta disminuida ($64:45$) entre el VII y IV grados, de tercera menor pitagórica ($32:27$) entre el II y IV grados, quinta justa ($3:2$) entre el V y el II grados, una tercera menor ($6:5$) entre el VII y el II grados, y una tercera mayor ($5:4$) entre el V y VII grados.

De estas relaciones se sacan rápidamente varias conclusiones, tales como que se trata de un acorde fuertemente polarizado ya que coexisten en él dos fundamentales armónicas muy diferenciadas, que son precisamente octavas inferiores de los grados V y IV, formantes de la séptima menor. Así, la quinta justa (3:2), tiene su fundamental armónica una octava por debajo del V grado, y la tercera mayor (5:4), y la tercera menor (6:5) la tienen de forma común a dos octavas por debajo del V grado, el intervalo de séptima menor (16:9), la tiene en un IV grado a tres octavas por debajo, la quinta disminuida (64:45) en un IV grado a seis octavas inferiores, y la tercera menor pitagórica (32:27) en un IV grado a cinco octavas por debajo. El siguiente gráfico muestra la totalidad del objeto sonoro que está dividido en dos partes bien diferenciadas puestas de manifiesto mediante la línea gruesa horizontal: la primera es el acorde, propiamente dicho, con sus relaciones interválicas entre sus notas componentes y, la segunda, a modo de raíces que mantienen y alimentan la parte visible de un árbol, las fundamentales armónicas en las que se sustentan dichas relaciones.



Es, por tanto, un acorde portador de dos fundamentales armónicas enfrentadas entre sí, y así se deja ver en los grados V, VII y II, que son constitutivos de las series físico-armónicas que producen ambas fundamentales: el V grado, a dos octavas superiores de su fundamental, es también el armónico 9 del IV grado, el VII grado es el armónico 5 de la fundamental armónica del V grado y el 45 de la fundamental armónica del IV y, por último, el II grado es el armónico 6 de la fundamental armónica del V grado y el 27 de la fundamental armónica del IV grado. Esa ambivalencia de los grados hace que el acorde contenga una energía potencial armónica muy importante y que ineludiblemente necesite resolver sobre alguna de esas fundamentales o, mejor, en otra distinta. Si se suprimiera el IV grado, el acorde quedaría, en ese sentido, “castrado”, ya que todas las relaciones productoras de tensión desaparecerían, quedando convertido en un acorde perfecto mayor que únicamente conservaría un potencial conferido por el discurrir musical precedente, pero no en sí la tensión generada por la convivencia de dos fundamentales armónicas en su seno. Si la nota suprimida fuera el V grado el acorde pasaría a ser de quinta disminuida e, implícitamente, conservaría parte de su potencial derivado del enfrentamiento del intervalo de tercera mayor (5:4), resolutorio en una fundamental del V grado ausente, con el resto de los intervalos, con resolución a varias octavas inferiores del IV. De ahí también el carácter débil e inestable del acorde de quinta disminuida sobre la sensible o séptimo grado. Buscando la mejor respuesta a una resolución del acorde, dado que sus fundamentales armónicas implícitas se encuentran en la sucesión de quintas a la derecha e izquierda del grado I (IV – I – V), está muy claro que si la misma se realiza sobre ese grado I rompe todas las tensiones, tanto potenciales

como dinámicas que tal acorde almacena, llevando el discurso musical a una situación de completo equilibrio.

Por tanto esa séptima menor de tono mayor (16:9) sí que es realmente una séptima funcional y nada tiene que ver con esa otra posible séptima (7:4), derivada del empleo del armónico 7, incompatible, desde un punto de vista armónico, con el sistema de justa entonación y con el temperado. Sin embargo tal armónico, y sus octavas, sí que podrían tener una manifiesta relevancia en un sistema musical de 19 sonidos por octava, ya que pasarían a formar parte de diez de sus intervalos, tales como 28:27, 15:14, 7:6, 9:7, 7:5, 10:7, 14,9, 12:7, 28:15 y 27:14, abriendo grandes posibilidades a otro tipo de música de características diferentes a la realizada hasta ahora.

Retomando, después de este paréntesis, la idea principal del presente estudio como es el de la consonancia y volviendo al gráfico del teclado, en la columna primera aparecen, como se dijo, todas las frecuencias correspondientes a las notas afinadas según el sistema temperado de doce notas por octava, en la segunda están escritas las frecuencias correspondientes a las notas que resultan ser armónicos del DO (C1) y, en la tercera, la diferencia en cents entre una y otra afinación.

Como se puede observar, todas ellas varían a excepción de las notas DO (octavas de la fundamental), que conservan la misma frecuencia. Las notas temperadas están, por tanto, desplazadas, en mayor o menor medida, de los armónicos naturales y fuera, en consecuencia, del estudio realizado hasta el momento, en el que se han manejado los 128 primeros de una serie físico-armónica. Pero, por supuesto, esto resulta una verdad a medias ya que se puede intentar encontrar su aproximación a una relación armónica equivalente.

Si se toma como ejemplo el intervalo de quinta justa temperada, u octavo grado de la escala cromática, se tiene que $8^\circ \text{ grado} = 2^{(7/12)} = 1,498307$. Es un valor 1,95 cents menor que la quinta natural ($3:2 = 1,5$). Luego dicho valor está comprendido entre la cuarta natural ($4:3=1,333\dots$) y dicha quinta, si consideramos las distancias entre intervalos correspondientes a la Curva I primaria. Se puede proceder a determinar una sucesión que contenga ese valor o el más aproximado a ese intervalo utilizando la técnica de “sumas” de fracciones ya vista con anterioridad. Así:

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Se ve ya que este valor resulta intermedio entre la cuarta y la quinta naturales. Avanzando otro escalón en la serie de curvas:

$$\frac{3}{2} + \frac{7}{5} = \frac{10}{7} = 1,42857$$

La nueva relación 10:7, intermedia entre 3:2 y 7:5, se acerca más al valor buscado. Pero ahora, ya se puede proceder a ordenar los términos obtenidos en una sucesión, tal como es:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{9}, \dots, \frac{3n-2}{2n-1}, \dots$$

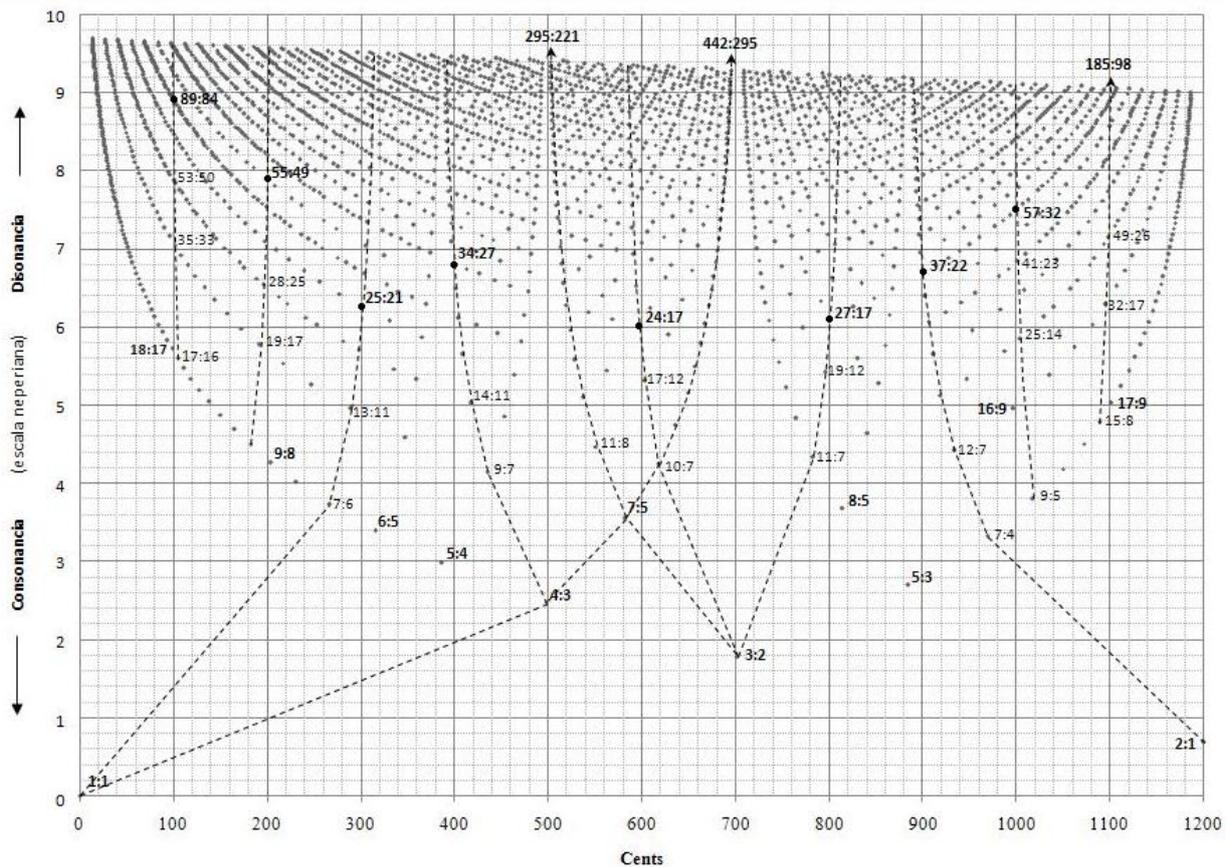
Igualando el enésimo término al intervalo de quinta justa temperada:

$$\frac{3n-2}{2n-1} = 2^{(7/12)} = 1,498307$$

Despejando, $n = 148,16 \approx 148$; sustituyendo este valor en el término enésimo:

$$\frac{(3*148) - 2}{(2*148) - 1} = \frac{442}{295} = 1,498305$$

La relación obtenida, $442:295 = 1,498305$, es menor en 0,0023 cents al intervalo de quinta justa del sistema temperado. Se puede concluir diciendo que dicha quinta temperada se origina, en teoría y en su forma más pura, mediante la relación de los armónicos $442:295$. Ahora bien, el límite al que tiende la sucesión, de la cual es un término esa relación, es $3:2$, o sea la quinta natural, siendo además dicha sucesión la generadora de una de las dos líneas asintóticas que tienen como límite la mencionada quinta natural, como puede verse en el gráfico siguiente (línea de trazos que comenzando en $1:1$ continúa por $4:3$, $7:5$, $10:7$,... $442:295$). Por tanto, a efectos de consonancia y funcionalidad armónica el intervalo $442:295$ es equiparable al intervalo $3:2$, que se constituye así como el verdadero soporte armónico de la quinta temperada, siendo la diferencia entre ellos de 1,96 cents.



Similar procedimiento puede llevarse a cabo con el resto de los grados de la escala temperada para obtener sus relaciones armónicas puras y comprobar que, todas ellas, a excepción de la segunda menor (2° grado) y de la séptima mayor (12° grado), pueden ser equiparadas con otras relaciones más cercanas a la fundamental armónica básica que coincidan con las que conforman el sistema de justa entonación. En ese mismo gráfico figuran todas las demás líneas correspondientes a las diversas sucesiones que conducen al valor más aproximado de cada intervalo temperado, mostrándose, con negrita y un punto grueso, la relación armónica equivalente obtenida. Todas ellas, como en el caso de la quinta justa, son asíntotas de una determinada relación correspondiente a un intervalo de justa entonación, que se muestra, en negrita, descendiendo verticalmente, desde el punto superior de cada una de esas líneas de trazos.

La tabla siguiente engloba a todas las sucesiones que contienen las relaciones entre armónicos equiparables a cada grado del sistema temperado. La tercera columna por la derecha muestra la diferencia en cents entre esas relaciones armónicas y los valores temperados. La segunda, también por la derecha, indica la relación interválica que es límite de cada sucesión y, por tanto, el soporte armónico de cada uno de los grados. La columna extrema, por la derecha, indica la diferencia en cents entre los valores temperados y sus correspondientes soportes armónicos.

Grados de la escala y sucesiones	Término enésimo	Relaciones armónicas y valor	Valores temperados	Dif. cents	Soporte arm.	Dif. cents
1º	-	$\frac{1}{1} = 1$	1	0	1:1	0
2º	$\frac{17}{16}, \frac{35}{33}, \frac{53}{50}, \dots, \frac{18n-1}{17n-1}$	$n = 5$	$\frac{89}{84} = 1,059523$	1,059463	+ 0,098	18:17 + 1,045
3º	$\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{19}{17}, \dots, \frac{9n-8}{8n-7}$	$n = 7$	$\frac{55}{49} = 1,122448$	1,122462	- 0,021	9:8 - 3,910
4º	$\frac{1}{1}, \frac{7}{6}, \frac{13}{11}, \dots, \frac{6n-5}{5n-4}$	$n = 5$	$\frac{25}{21} = 1,190476$	1,189207	+1,846	6:5 - 15,661
5º	$\frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{14}{11}, \dots, \frac{5n-1}{4n-1}$	$n = 7$	$\frac{34}{27} = 1,259259$	1,259921	- 0,909	5:4 + 13,686
6º	$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \dots, \frac{4n-1}{3n-1}$	$n = 74$	$\frac{295}{221} = 1,334841$	1,334839	+ 0,002	4:3 + 1,955
7º	$\frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{7n-4}{5n-3}$	$n = 4$	$\frac{24}{17} = 1,411764$	1,414213	- 3	7:5 + 17,487
8º	$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{3n-2}{2n-1}$	$n = 148$	$\frac{442}{295} = 1,498305$	1,498307	- 0,002	3:2 - 1,955
9º	$\frac{3}{2}, \frac{11}{7}, \frac{19}{12}, \dots, \frac{8n-5}{5n-3}$	$n = 4$	$\frac{27}{17} = 1,588235$	1,587401	+ 0,909	8:5 - 13,686
10º	$\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \dots, \frac{5n-3}{3n-2}$	$n = 8$	$\frac{37}{22} = 1,681818$	1,681792	+ 0,026	5:3 + 15,640
11º	$\frac{9}{5}, \frac{25}{14}, \frac{41}{23}, \dots, \frac{16n-7}{9n-4}$	$n = 4$	$\frac{57}{32} = 1,78125$	1,781797	- 0,531	16:9 + 3,910
12º	$\frac{15}{8}, \frac{32}{17}, \frac{49}{26}, \dots, \frac{17n-2}{9n-1}$	$n = 11$	$\frac{185}{98} = 1,887755$	1,887748	+ 0,006	17:9 - 1,045

Como se dijo, se presentan como excepciones el 2º grado (2ª menor) y el 12º (séptima mayor). En el caso del 2º grado la sucesión que lo engloba tiene como límite la relación 18:17, de la que este se encuentra a una distancia de +1,045 cents, y la cual se halla, a su vez, a una distancia de -12,77 cents de la relación 16:15, propia de la segunda menor de la justa entonación. Por tanto, la relación 16:15 parece, a priori, mantenerse al margen de ese 2º grado temperado, no compartiendo nada con él.

Ahora bien, el lugar que ocupa ese 2º grado, o segunda menor, entra ya muy de lleno dentro del ámbito de la disonancia y, por tanto, resulta más difícil de cuantificar por el oído humano. La relación 18:17 que sustenta al mencionado 2º grado tiene un grado de disonancia de $\ln(18 \cdot 17) = 5,72$, siendo el de la segunda menor de la justa entonación de $\ln(16 \cdot 15) = 5,48$. Su diferencia, 0,24 es, pues, muy pequeña, comparable a la que existe entre el tono mayor (9:8) y el tono menor (10:9), por lo que la percepción de ambas viene a ser equivalente, si se ejecutan de forma separada. Pero, si a efectos de disonancia el 2º grado temperado no parece comprometer hasta ahora nada de lo referido, quizá resulta más problemático el hecho de que su soporte armónico (18:17) sea diferente del previsto, tal como debiera ser la relación 16:15.

Si se ejecuta de forma independiente una segunda menor temperada su soporte armónico se encontrará situado en la mencionada relación 18:17, la más cercana a su valor original, como puede verse en el siguiente ejemplo en el que dicho intervalo se forma a partir de las frecuencias correspondientes a la nota SI (B4 = 493,88 hertzios) y la nota DO (C5 = 523,25 hertzios) temperadas. Para ello, como en otras ocasiones, se igualará su relación con el término enésimo de la sucesión que origina la Curva 1 primaria:

$$\frac{C5}{B4} = \frac{523,25}{493,88} = \frac{n+1}{n}$$

Despejando, $n = 16,81 \approx 17$. Luego

$$\frac{C5}{B4} = \frac{523,25}{493,88} \approx \frac{18}{17}$$

Si se utiliza el mismo procedimiento pero partiendo de los valores de esas notas en el sistema de justa entonación, se tendrá que el SI (B4) es igual a 490,50 hertzios, manteniéndose el DO (C5) con el mismo valor:

$$\frac{C5}{B4} = \frac{523,25}{490,50} = \frac{n+1}{n}$$

Despejando, $n = 14,97 \approx 15$. Luego:

$$\frac{C5}{B4} = \frac{523,25}{490,50} \approx \frac{16}{15}$$

Sin embargo, hay que admitir que en la práctica musical el intervalo de segunda menor del sistema temperado sustituye con absoluta precisión al intervalo de segunda menor de la justa entonación, por lo que ello conlleva a considerar que, en un proceso musical, en el que los demás intervalos, propios del sistema temperado, se encontrarán en muchos momentos presentes por el continuo devenir del discurso musical y mediatizados por sus soportes armónicos correspondientes a la justa entonación, el intervalo de segunda menor temperada sufrirá también, desde un punto de vista sensorial, la atracción del soporte correspondiente a la segunda menor de la justa entonación (16:15), despegándose de su verdadero soporte armónico, la relación 18:17, y amoldándose así al resto de los intervalos en acción. Esta particularidad que se da en dicho intervalo de segunda menor es, por motivos idénticos, extrapolable también al otro intervalo “disidente”, como es el de séptima mayor temperada.

De este modo, gracias a las “imperfecciones” que acompañan al sentido auditivo humano, el sistema temperado puede sustituir o acoplarse al sistema natural o de justa entonación sin que se perciban diferencias sustanciales o inadmisibles entre ambos.

1.13.- Conclusión.- A lo largo de las páginas anteriores se ha desarrollado una teoría en torno a la consonancia basada en principios matemáticos que tienen como punto de partida la serie físico-armónica. Los resultados obtenidos permiten realizar una clasificación numérica y gradual de cualquier tipo de intervalo, ligando a continuación dichos resultados con la percepción que el ser humano hace de los mismos, lo que da lugar a una clasificación básica, precisa y sistemática de la sensación de consonancia-disonancia. El conocimiento de que cada intervalo responde a un concreto grado de consonancia-disonancia, ahora cuantificable, y la constatación de la existencia de una fundamental armónica que le sustenta, hace viable así mismo, aplicando estos principios, la cuantificación de cualquier tipo de acorde y la comprensión de su funcionalidad armónica, una comprensión que ya no tiene por qué basarse en reglas o normas establecidas a lo largo de la historia, y con mayor o menor rigor por teóricos de la música, sino que obedece a estrictas leyes físico-armónicas que sintetizan y cuantifican las relaciones de tensión o distensión que se generan entre los sonidos cuando se combinan verticalmente, o se suceden en el tiempo, merced a su grado de consonancia-disonancia y a las fundamentales armónicas que los soportan.

Su aplicación, tanto en el campo analítico como en el compositivo, puede ser de gran utilidad práctica al convertir en mensurables todo los conceptos que, hasta ahora, se encontraban rodeados de una buena dosis de inconcreción e incertidumbre debido, en gran parte, a los procedimientos poco rigurosos utilizados en su determinación.

En Madrid, a 13 de noviembre de 2013

ANEXO

**Relaciones entre los 128 primeros armónicos de la serie físico-armónica
en el ámbito de la octava**

Copyright Luis de la Barrera 2013

Relaciones entre los 128 primeros armónicos de la serie físico-armónica en el ámbito de la octava

Razón	Valor	Cents	Rec.*	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
1:1	1	0	128	82:81	1,012345679	21,2	1	99:97	1,020618557	35,3	1
128:127	1,007874016	13,6	1	81:80	1,0125	21,5	1	49:48	1,020833333	35,7	2
127:126	1,007936508	13,7	1	80:79	1,012658228	21,8	1	97:95	1,021052632	36,1	1
126:125	1,008	13,8	1	79:78	1,012820513	22,1	1	48:47	1,021276596	36,4	2
125:124	1,008064516	13,9	1	78:77	1,012987013	22,3	1	95:93	1,021505376	36,8	1
124:123	1,008130081	14	1	77:76	1,013157895	22,6	1	47:46	1,02173913	37,2	2
123:122	1,008196721	14,1	1	76:75	1,013333333	22,9	1	93:91	1,021978022	37,6	1
122:121	1,008264463	14,2	1	75:74	1,013513514	23,2	1	46:45	1,022222222	38,1	2
121:120	1,008333333	14,4	1	74:73	1,01369863	23,6	1	91:89	1,02247191	38,5	1
120:119	1,008403361	14,5	1	73:72	1,013888889	23,9	1	45:44	1,022727273	38,9	2
119:118	1,008474576	14,6	1	72:71	1,014084507	24,2	1	89:87	1,022988506	39,3	1
118:117	1,008547009	14,7	1	71:70	1,014285714	24,6	1	44:43	1,023255814	39,8	2
117:116	1,00862069	14,9	1	70:69	1,014492754	24,9	1	87:85	1,023529412	40,3	1
116:115	1,008695652	15	1	69:68	1,014705882	25,3	1	43:42	1,023809524	40,7	2
115:114	1,00877193	15,1	1	68:67	1,014925373	25,6	1	128:125	1,024	41,1	1
114:113	1,008849558	15,3	1	67:66	1,015151515	26	1	85:83	1,024096386	41,2	1
113:112	1,008928571	15,4	1	66:65	1,015384615	26,4	1	127:124	1,024193548	41,4	1
112:111	1,009009009	15,5	1	65:64	1,015625	26,8	1	42:41	1,024390244	41,7	3
111:110	1,009090909	15,7	1	64:63	1,015873016	27,3	2	125:122	1,024590164	42,1	1
110:109	1,009174312	15,8	1	127:125	1,016	27,5	1	83:81	1,024691358	42,2	1
109:108	1,009259259	16	1	63:62	1,016129032	27,7	2	124:121	1,024793388	42,4	1
108:107	1,009345794	16,1	1	125:123	1,016260163	27,9	1	41:40	1,025	42,7	3
107:106	1,009433962	16,3	1	62:61	1,016393443	28,2	2	122:119	1,025210084	43,1	1
106:105	1,00952381	16,4	1	123:121	1,016528926	28,4	1	81:79	1,025316456	43,3	1
105:104	1,009615385	16,6	1	61:60	1,016666667	28,6	2	121:118	1,025423729	43,5	1
104:103	1,009708738	16,7	1	121:119	1,016806723	28,9	1	40:39	1,025641026	43,8	3
103:102	1,009803922	16,9	1	60:59	1,016949153	29,1	2	119:116	1,025862069	44,2	1
102:101	1,00990099	17,1	1	119:117	1,017094017	29,3	1	79:77	1,025974026	44,4	1
101:100	1,01	17,2	1	59:58	1,017241379	29,6	2	118:115	1,026086957	44,6	1
100:99	1,01010101	17,4	1	117:115	1,017391304	29,8	1	39:38	1,026315789	45	3
99:98	1,010204082	17,6	1	58:57	1,01754386	30,1	2	116:113	1,026548673	45,4	1
98:97	1,010309278	17,8	1	115:113	1,017699115	30,4	1	77:75	1,026666667	45,6	1
97:96	1,010416667	17,9	1	57:56	1,017857143	30,6	2	115:112	1,026785714	45,8	1
96:95	1,010526316	18,1	1	113:111	1,018018018	30,9	1	38:37	1,027027027	46,2	3
95:94	1,010638298	18,3	1	56:55	1,018181818	31,2	2	113:110	1,027272727	46,6	1
94:93	1,010752688	18,5	1	111:109	1,018348624	31,5	1	75:73	1,02739726	46,8	1
93:92	1,010869565	18,7	1	55:54	1,018518519	31,8	2	112:109	1,027522936	47	1
92:91	1,010989011	18,9	1	109:107	1,018691589	32,1	1	37:36	1,027777778	47,4	3
91:90	1,011111111	19,1	1	54:53	1,018867925	32,4	2	110:107	1,028037383	47,9	1
90:89	1,011235955	19,3	1	107:105	1,019047619	32,7	1	73:71	1,028169014	48,1	1
89:88	1,011363636	19,6	1	53:52	1,019230769	33	2	109:106	1,028301887	48,3	1
88:87	1,011494253	19,8	1	105:103	1,019417476	33,3	1	36:35	1,028571429	48,8	3
87:86	1,011627907	20	1	52:51	1,019607843	33,6	2	107:104	1,028846154	49,2	1
86:85	1,011764706	20,2	1	103:101	1,01980198	33,9	1	71:69	1,028985507	49,5	1
85:84	1,011904762	20,5	1	51:50	1,02	34,3	2	106:103	1,029126214	49,7	1
84:83	1,012048193	20,7	1	101:99	1,02020202	34,6	1	35:34	1,029411765	50,2	3
83:82	1,012195122	21	1	50:49	1,020408163	35	2	104:101	1,02970297	50,7	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
69:67	1,029850746	50,9	1	128:123	1,040650407	69	1	104:99	1,050505051	85,3	1
103:100	1,03	51,2	1	51:49	1,040816327	69,3	2	83:79	1,050632911	85,5	1
34:33	1,03030303	51,7	3	127:122	1,040983607	69,5	1	62:59	1,050847458	85,9	2
101:98	1,030612245	52,2	1	76:73	1,04109589	69,7	1	103:98	1,051020408	86,1	1
67:65	1,030769231	52,5	1	101:97	1,041237113	70	1	41:39	1,051282051	86,6	3
100:97	1,030927835	52,7	1	126:121	1,041322314	70,1	1	102:97	1,051546392	87	1
33:32	1,03125	53,3	3	25:24	1,041666667	70,7	5	61:58	1,051724138	87,3	2
98:95	1,031578947	53,8	1	124:119	1,042016807	71,3	1	81:77	1,051948052	87,7	1
65:63	1,031746032	54,1	1	99:95	1,042105263	71,4	1	101:96	1,052083333	87,9	1
97:94	1,031914894	54,4	1	74:71	1,042253521	71,6	1	121:115	1,052173913	88	1
32:31	1,032258065	55	4	123:118	1,042372881	71,8	1	20:19	1,052631579	88,8	6
127:123	1,032520325	55,4	1	49:47	1,042553191	72,1	2	119:113	1,053097345	89,6	1
95:92	1,032608696	55,6	1	122:117	1,042735043	72,4	1	99:94	1,053191489	89,7	1
63:61	1,032786885	55,9	2	73:70	1,042857143	72,6	1	79:75	1,053333333	90	1
94:91	1,032967033	56,2	1	97:93	1,043010753	72,9	1	59:56	1,053571429	90,3	2
125:121	1,033057851	56,3	1	121:116	1,043103448	73,1	1	98:93	1,053763441	90,7	1
31:30	1,033333333	56,8	4	24:23	1,043478261	73,7	5	39:37	1,054054054	91,1	3
123:119	1,033613445	57,2	1	119:114	1,043859649	74,3	1	97:92	1,054347826	91,6	1
92:89	1,033707865	57,4	1	95:91	1,043956044	74,5	1	58:55	1,054545455	91,9	2
61:59	1,033898305	57,7	2	71:68	1,044117647	74,7	1	77:73	1,054794521	92,4	1
91:88	1,034090909	58	1	118:113	1,044247788	75	1	96:91	1,054945055	92,6	1
121:117	1,034188034	58,2	1	47:45	1,044444444	75,3	2	115:109	1,055045872	92,8	1
30:29	1,034482759	58,7	4	117:112	1,044642857	75,6	1	19:18	1,055555556	93,6	6
119:115	1,034782609	59,2	1	70:67	1,044776119	75,8	1	113:107	1,056074766	94,5	1
89:86	1,034883721	59,4	1	93:89	1,04494382	76,1	1	94:89	1,056179775	94,6	1
59:57	1,035087719	59,7	2	116:111	1,045045045	76,3	1	75:71	1,056338028	94,9	1
88:85	1,035294118	60	1	23:22	1,045454545	77	5	56:53	1,056603774	95,3	2
117:113	1,03539823	60,2	1	114:109	1,04587156	77,6	1	93:88	1,056818182	95,7	1
29:28	1,035714286	60,8	4	91:87	1,045977011	77,8	1	37:35	1,057142857	96,2	3
115:111	1,036036036	61,3	1	68:65	1,046153846	78,1	1	92:87	1,057471264	96,7	1
86:83	1,036144578	61,5	1	113:108	1,046296296	78,3	1	55:52	1,057692308	97,1	2
57:55	1,036363636	61,8	2	45:43	1,046511628	78,7	2	128:121	1,05785124	97,4	1
85:82	1,036585366	62,2	1	112:107	1,046728972	79,1	1	73:69	1,057971014	97,6	1
113:109	1,036697248	62,4	1	67:64	1,046875	79,3	1	91:86	1,058139535	97,8	1
28:27	1,037037037	63	4	89:85	1,047058824	79,6	1	109:103	1,058252427	98	1
111:107	1,037383178	63,5	1	111:106	1,047169811	79,8	1	127:120	1,058333333	98,2	1
83:80	1,0375	63,7	1	22:21	1,047619048	80,5	5	18:17	1,058823529	99	7
55:53	1,037735849	64,1	2	109:104	1,048076923	81,3	1	125:118	1,059322034	99,8	1
82:79	1,037974684	64,5	1	87:83	1,048192771	81,5	1	107:101	1,059405941	99,9	1
109:105	1,038095238	64,7	1	65:62	1,048387097	81,8	1	89:84	1,05952381	100	1
27:26	1,038461538	65,3	4	108:103	1,048543689	82,1	1	71:67	1,059701493	100	1
107:103	1,038834951	66	1	43:41	1,048780488	82,5	2	124:117	1,05982906	101	1
80:77	1,038961039	66,2	1	107:102	1,049019608	82,8	1	53:50	1,06	101	2
53:51	1,039215686	66,6	2	64:61	1,049180328	83,1	2	88:83	1,060240964	101	1
79:76	1,039473684	67	1	85:81	1,049382716	83,4	1	123:116	1,060344828	101	1
105:101	1,03960396	67,2	1	106:101	1,04950495	83,7	1	35:33	1,060606061	102	3
26:25	1,04	67,9	4	127:121	1,049586777	83,8	1	122:115	1,060869565	102	1
103:99	1,04040404	68,6	1	21:20	1,05	84,5	6	87:82	1,06097561	102	1
77:74	1,040540541	68,8	1	125:119	1,050420168	85,2	1	52:49	1,06122449	103	2

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
121:114	1,061403509	103	1	74:69	1,072463768	121	1	116:107	1,08411215	140	1
69:65	1,061538462	103	1	59:55	1,072727273	122	2	103:95	1,084210526	140	1
86:81	1,061728395	104	1	103:96	1,072916667	122	1	90:83	1,084337349	140	1
103:97	1,06185567	104	1	44:41	1,073170732	122	2	77:71	1,084507042	140	1
120:113	1,061946903	104	1	117:109	1,073394495	123	1	64:59	1,084745763	141	2
17:16	1,0625	105	7	73:68	1,073529412	123	1	115:106	1,08490566	141	1
118:111	1,063063063	106	1	102:95	1,073684211	123	1	51:47	1,085106383	141	2
101:95	1,063157895	106	1	29:27	1,074074074	124	4	89:82	1,085365854	142	1
84:79	1,063291139	106	1	101:94	1,074468085	124	1	127:117	1,085470085	142	1
67:63	1,063492063	107	1	72:67	1,074626866	125	1	38:35	1,085714286	142	3
117:110	1,063636364	107	1	115:107	1,074766355	125	1	101:93	1,086021505	143	1
50:47	1,063829787	107	2	43:40	1,075	125	2	63:58	1,086206897	143	2
83:78	1,064102564	108	1	100:93	1,075268817	126	1	88:81	1,086419753	143	1
116:109	1,064220183	108	1	57:53	1,075471698	126	2	113:104	1,086538462	144	1
33:31	1,064516129	108	3	128:119	1,075630252	126	1	25:23	1,086956522	144	5
115:108	1,064814815	109	1	71:66	1,075757576	126	1	112:103	1,087378641	145	1
82:77	1,064935065	109	1	85:79	1,075949367	127	1	87:80	1,0875	145	1
49:46	1,065217391	109	2	99:92	1,076086957	127	1	62:57	1,087719298	146	2
114:107	1,065420561	110	1	113:105	1,076190476	127	1	99:91	1,087912088	146	1
65:61	1,06557377	110	1	127:118	1,076271186	127	1	37:34	1,088235294	146	3
81:76	1,065789474	110	1	14:13	1,076923077	128	9	123:113	1,088495575	147	1
97:91	1,065934066	111	1	125:116	1,077586207	129	1	86:79	1,088607595	147	1
113:106	1,066037736	111	1	111:103	1,077669903	129	1	49:45	1,088888889	147	2
16:15	1,066666667	112	8	97:90	1,077777778	130	1	110:101	1,089108911	148	1
127:119	1,067226891	113	1	83:77	1,077922078	130	1	61:56	1,089285714	148	2
111:104	1,067307692	113	1	69:64	1,078125	130	1	73:67	1,089552239	148	1
95:89	1,06741573	113	1	124:115	1,07826087	130	1	85:78	1,08974359	149	1
79:74	1,067567568	113	1	55:51	1,078431373	131	2	97:89	1,08988764	149	1
63:59	1,06779661	114	2	96:89	1,078651685	131	1	109:100	1,09	149	1
110:103	1,067961165	114	1	41:38	1,078947368	132	3	121:111	1,09009009	149	1
47:44	1,068181818	114	2	109:101	1,079207921	132	1	12:11	1,090909091	151	10
125:117	1,068376068	115	1	68:63	1,079365079	132	1	119:109	1,091743119	152	1
78:73	1,068493151	115	1	95:88	1,079545455	133	1	107:98	1,091836735	152	1
109:102	1,068627451	115	1	122:113	1,079646018	133	1	95:87	1,091954023	152	1
31:29	1,068965517	115	4	27:25	1,08	133	4	83:76	1,092105263	153	1
108:101	1,069306931	116	1	121:112	1,080357143	134	1	71:65	1,092307692	153	1
77:72	1,069444444	116	1	94:87	1,08045977	134	1	59:54	1,092592593	153	2
123:115	1,069565217	116	1	67:62	1,080645161	134	1	106:97	1,092783505	154	1
46:43	1,069767442	117	2	107:99	1,080808081	135	1	47:43	1,093023256	154	2
107:100	1,07	117	1	40:37	1,081081081	135	3	82:75	1,093333333	154	1
61:57	1,070175439	117	2	93:86	1,081395349	135	1	117:107	1,093457944	155	1
76:71	1,070422535	118	1	53:49	1,081632653	136	2	35:32	1,09375	155	3
91:85	1,070588235	118	1	119:110	1,081818182	136	1	128:117	1,094017094	156	1
106:99	1,070707071	118	1	66:61	1,081967213	136	1	93:85	1,094117647	156	1
121:113	1,07079646	118	1	79:73	1,082191781	137	1	58:53	1,094339623	156	2
15:14	1,071428571	119	8	92:85	1,082352941	137	1	81:74	1,094594595	156	1
119:111	1,072072072	120	1	105:97	1,082474227	137	1	104:95	1,094736842	157	1
104:97	1,072164948	121	1	118:109	1,082568807	137	1	127:116	1,094827586	157	1
89:83	1,072289157	121	1	13:12	1,083333333	139	9	23:21	1,095238095	157	5

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
126:115	1,095652174	158	1	114:103	1,106796117	176	1	113:101	1,118811881	194	1
103:94	1,095744681	158	1	31:28	1,107142857	176	4	47:42	1,119047619	195	2
80:73	1,095890411	159	1	103:93	1,107526882	177	1	122:109	1,119266055	195	1
57:52	1,096153846	159	2	72:65	1,107692308	177	1	75:67	1,119402985	195	1
91:83	1,096385542	159	1	113:102	1,107843137	177	1	103:92	1,119565217	196	1
125:114	1,096491228	159	1	41:37	1,108108108	178	3	28:25	1,12	196	4
34:31	1,096774194	160	3	92:83	1,108433735	178	1	121:108	1,12037037	197	1
113:103	1,097087379	160	1	51:46	1,108695652	179	2	93:83	1,120481928	197	1
79:72	1,097222222	161	1	112:101	1,108910891	179	1	65:58	1,120689655	197	1
124:113	1,097345133	161	1	61:55	1,109090909	179	2	102:91	1,120879121	198	1
45:41	1,097560976	161	2	71:64	1,109375	180	1	37:33	1,121212121	198	3
101:92	1,097826087	162	1	81:73	1,109589041	180	1	120:107	1,121495327	199	1
56:51	1,098039216	162	2	91:82	1,109756098	180	1	83:74	1,121621622	199	1
123:112	1,098214286	162	1	101:91	1,10989011	181	1	46:41	1,12195122	199	2
67:61	1,098360656	162	1	111:100	1,11	181	1	101:90	1,122222222	200	1
78:71	1,098591549	163	1	121:109	1,110091743	181	1	55:49	1,12244898	200	2
89:81	1,098765432	163	1	10:9	1,111111111	182	12	119:106	1,122641509	200	1
100:91	1,098901099	163	1	119:107	1,112149533	184	1	64:57	1,122807018	201	2
111:101	1,099009901	163	1	109:98	1,112244898	184	1	73:65	1,123076923	201	1
122:111	1,099099099	164	1	99:89	1,112359551	184	1	82:73	1,123287671	201	1
11:10	1,1	165	11	89:80	1,1125	185	1	91:81	1,12345679	202	1
120:109	1,100917431	166	1	79:71	1,112676056	185	1	100:89	1,123595506	202	1
109:99	1,101010101	167	1	69:62	1,112903226	185	1	109:97	1,12371134	202	1
98:89	1,101123596	167	1	128:115	1,113043478	185	1	118:105	1,123809524	202	1
87:79	1,101265823	167	1	59:53	1,113207547	186	2	127:113	1,123893805	202	1
76:69	1,101449275	167	1	108:97	1,113402062	186	1	9:8	1,125	204	14
65:59	1,101694915	168	1	49:44	1,113636364	186	2	125:111	1,126126126	206	1
119:108	1,101851852	168	1	88:79	1,113924051	187	1	116:103	1,126213592	206	1
54:49	1,102040816	168	2	127:114	1,114035088	187	1	107:95	1,126315789	206	1
97:88	1,102272727	169	1	39:35	1,114285714	187	3	98:87	1,126436782	206	1
43:39	1,102564103	169	2	107:96	1,114583333	188	1	89:79	1,126582278	206	1
118:107	1,102803738	169	1	68:61	1,114754098	188	1	80:71	1,126760563	207	1
75:68	1,102941176	170	1	97:87	1,114942529	188	1	71:63	1,126984127	207	1
107:97	1,103092784	170	1	126:113	1,115044248	189	1	62:55	1,127272727	207	2
32:29	1,103448276	170	4	29:26	1,115384615	189	4	115:102	1,12745098	208	1
117:106	1,103773585	171	1	106:95	1,115789474	190	1	53:47	1,127659574	208	2
85:77	1,103896104	171	1	77:69	1,115942029	190	1	97:86	1,127906977	208	1
53:48	1,104166667	172	2	125:112	1,116071429	190	1	44:39	1,128205128	209	2
127:115	1,104347826	172	1	48:43	1,11627907	190	2	123:109	1,128440367	209	1
74:67	1,104477612	172	1	115:103	1,116504854	191	1	79:70	1,128571429	209	1
95:86	1,104651163	172	1	67:60	1,116666667	191	1	114:101	1,128712871	210	1
116:105	1,104761905	172	1	86:77	1,116883117	191	1	35:31	1,129032258	210	3
21:19	1,105263158	173	6	105:94	1,117021277	192	1	96:85	1,129411765	211	1
115:104	1,105769231	174	1	124:111	1,117117117	192	1	61:54	1,12962963	211	2
94:85	1,105882353	174	1	19:17	1,117647059	193	6	87:77	1,12987013	211	1
73:66	1,106060606	175	1	123:110	1,118181818	193	1	113:100	1,13	212	1
125:113	1,10619469	175	1	104:93	1,11827957	194	1	26:23	1,130434783	212	4
52:47	1,106382979	175	2	85:76	1,118421053	194	1	121:107	1,130841121	213	1
83:75	1,106666667	175	1	66:59	1,118644068	194	1	95:84	1,130952381	213	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
69:61	1,131147541	213	1	103:90	1,144444444	234	1	59:51	1,156862745	252	2
112:99	1,131313131	214	1	95:83	1,144578313	234	1	81:70	1,157142857	253	1
43:38	1,131578947	214	2	87:76	1,144736842	234	1	103:89	1,157303371	253	1
103:91	1,131868132	214	1	79:69	1,144927536	234	1	125:108	1,157407407	253	1
60:53	1,132075472	215	2	71:62	1,14516129	235	1	22:19	1,157894737	254	5
77:68	1,132352941	215	1	63:55	1,145454545	235	2	117:101	1,158415842	255	1
94:83	1,13253012	215	1	118:103	1,145631068	235	1	95:82	1,158536585	255	1
111:98	1,132653061	216	1	55:48	1,145833333	236	2	73:63	1,158730159	255	1
128:113	1,132743363	216	1	102:89	1,146067416	236	1	124:107	1,158878505	255	1
17:15	1,133333333	217	7	47:41	1,146341463	236	2	51:44	1,159090909	256	2
127:112	1,133928571	218	1	86:75	1,146666667	237	1	80:69	1,15942029	256	1
110:97	1,134020619	218	1	125:109	1,146788991	237	1	109:94	1,159574468	256	1
93:82	1,134146341	218	1	39:34	1,147058824	238	3	29:25	1,16	257	4
76:67	1,134328358	218	1	109:95	1,147368421	238	1	123:106	1,160377358	258	1
59:52	1,134615385	219	2	70:61	1,147540984	238	1	94:81	1,160493827	258	1
101:89	1,134831461	219	1	101:88	1,147727273	239	1	65:56	1,160714286	258	1
42:37	1,135135135	219	3	31:27	1,148148148	239	4	101:87	1,16091954	258	1
109:96	1,135416667	220	1	116:101	1,148514851	240	1	36:31	1,161290323	259	3
67:59	1,13559322	220	1	85:74	1,148648649	240	1	115:99	1,161616162	259	1
92:81	1,135802469	220	1	54:47	1,14893617	240	2	79:68	1,161764706	260	1
117:103	1,13592233	221	1	77:67	1,149253731	241	1	122:105	1,161904762	260	1
25:22	1,136363636	221	5	100:87	1,149425287	241	1	43:37	1,162162162	260	2
108:95	1,136842105	222	1	123:107	1,14953271	241	1	93:80	1,1625	261	1
83:73	1,136986301	222	1	23:20	1,15	242	5	50:43	1,162790698	261	2
58:51	1,137254902	223	2	107:93	1,150537634	243	1	107:92	1,163043478	261	1
91:80	1,1375	223	1	84:73	1,150684932	243	1	57:49	1,163265306	262	2
124:109	1,137614679	223	1	61:53	1,150943396	243	2	121:104	1,163461538	262	1
33:29	1,137931034	224	3	99:86	1,151162791	244	1	64:55	1,163636364	262	2
107:94	1,138297872	224	1	38:33	1,151515152	244	3	71:61	1,163934426	263	1
74:65	1,138461538	225	1	91:79	1,151898734	245	1	78:67	1,164179104	263	1
115:101	1,138613861	225	1	53:46	1,152173913	245	2	85:73	1,164383562	263	1
41:36	1,138888889	225	3	121:105	1,152380952	246	1	92:79	1,164556962	264	1
90:79	1,139240506	226	1	68:59	1,152542373	246	1	99:85	1,164705882	264	1
49:43	1,139534884	226	2	83:72	1,152777778	246	1	106:91	1,164835165	264	1
106:93	1,139784946	227	1	98:85	1,152941176	246	1	113:97	1,164948454	264	1
57:50	1,14	227	2	113:98	1,153061224	247	1	120:103	1,165048544	264	1
122:107	1,140186916	227	1	128:111	1,153153153	247	1	127:109	1,165137615	265	1
65:57	1,140350877	227	1	15:13	1,153846154	248	8	7:6	1,166666667	267	18
73:64	1,140625	228	1	127:110	1,154545455	249	1	125:107	1,168224299	269	1
81:71	1,14084507	228	1	112:97	1,154639175	249	1	118:101	1,168316832	269	1
89:78	1,141025641	228	1	97:84	1,154761905	249	1	111:95	1,168421053	269	1
97:85	1,141176471	229	1	82:71	1,154929577	249	1	104:89	1,168539326	270	1
105:92	1,141304348	229	1	67:58	1,155172414	250	1	97:83	1,168674699	270	1
113:99	1,141414141	229	1	119:103	1,155339806	250	1	90:77	1,168831169	270	1
121:106	1,141509434	229	1	52:45	1,155555556	250	2	83:71	1,169014085	270	1
8:7	1,142857143	231	16	89:77	1,155844156	251	1	76:65	1,169230769	271	1
127:111	1,144144144	233	1	126:109	1,155963303	251	1	69:59	1,169491525	271	1
119:104	1,144230769	233	1	37:32	1,15625	251	3	62:53	1,169811321	272	2
111:97	1,144329897	233	1	96:83	1,156626506	252	1	117:100	1,17	272	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
55:47	1,170212766	272	2	71:60	1,183333333	291	1	67:56	1,196428571	310	1
103:88	1,170454545	272	1	58:49	1,183673469	292	2	73:61	1,196721311	311	1
48:41	1,170731707	273	2	103:87	1,183908046	292	1	79:66	1,196969697	311	1
89:76	1,171052632	273	1	45:38	1,184210526	293	2	85:71	1,197183099	312	1
41:35	1,171428571	274	3	122:103	1,184466019	293	1	91:76	1,197368421	312	1
116:99	1,171717172	274	1	77:65	1,184615385	293	1	97:81	1,197530864	312	1
75:64	1,171875	275	1	109:92	1,184782609	294	1	103:86	1,197674419	312	1
109:93	1,172043011	275	1	32:27	1,185185185	294	4	109:91	1,197802198	312	1
34:29	1,172413793	275	3	115:97	1,18556701	295	1	115:96	1,197916667	313	1
95:81	1,172839506	276	1	83:70	1,185714286	295	1	121:101	1,198019802	313	1
61:52	1,173076923	276	2	51:43	1,186046512	295	2	127:106	1,198113208	313	1
88:75	1,173333333	277	1	121:102	1,18627451	296	1	6:5	1,2	316	21
115:98	1,173469388	277	1	70:59	1,186440678	296	1	125:104	1,201923077	318	1
27:23	1,173913043	278	4	89:75	1,186666667	296	1	119:99	1,202020202	319	1
128:109	1,174311927	278	1	108:91	1,186813187	297	1	113:94	1,20212766	319	1
101:86	1,174418605	278	1	127:107	1,186915888	297	1	107:89	1,202247191	319	1
74:63	1,174603175	279	1	19:16	1,1875	298	6	101:84	1,202380952	319	1
121:103	1,174757282	279	1	120:101	1,188118812	298	1	95:79	1,202531646	319	1
47:40	1,175	279	2	101:85	1,188235294	299	1	89:74	1,202702703	320	1
114:97	1,175257732	280	1	82:69	1,188405797	299	1	83:69	1,202898551	320	1
67:57	1,175438596	280	1	63:53	1,188679245	299	2	77:64	1,203125	320	1
87:74	1,175675676	280	1	107:90	1,188888889	300	1	71:59	1,203389831	321	1
107:91	1,175824176	280	1	44:37	1,189189189	300	2	65:54	1,203703704	321	1
127:108	1,175925926	281	1	113:95	1,189473684	300	1	124:103	1,203883495	321	1
20:17	1,176470588	281	6	69:58	1,189655172	301	1	59:49	1,204081633	322	2
113:96	1,177083333	282	1	94:79	1,189873418	301	1	112:93	1,204301075	322	1
93:79	1,17721519	282	1	119:100	1,19	301	1	53:44	1,204545455	322	2
73:62	1,177419355	283	1	25:21	1,19047619	302	5	100:83	1,204819277	323	1
126:107	1,177570093	283	1	106:89	1,191011236	303	1	47:39	1,205128205	323	2
53:45	1,177777778	283	2	81:68	1,191176471	303	1	88:73	1,205479452	324	1
86:73	1,178082192	284	1	56:47	1,191489362	303	2	41:34	1,205882353	324	3
119:101	1,178217822	284	1	87:73	1,191780822	304	1	117:97	1,206185567	325	1
33:28	1,178571429	284	3	118:99	1,191919192	304	1	76:63	1,206349206	325	1
112:95	1,178947368	285	1	31:26	1,192307692	305	4	111:92	1,206521739	325	1
79:67	1,179104478	285	1	99:83	1,192771084	305	1	35:29	1,206896552	326	3
125:106	1,179245283	285	1	68:57	1,192982456	305	1	99:82	1,207317073	326	1
46:39	1,179487179	286	2	105:88	1,193181818	306	1	64:53	1,20754717	326	2
105:89	1,179775281	286	1	37:31	1,193548387	306	3	93:77	1,207792208	327	1
59:50	1,18	287	2	117:98	1,193877551	307	1	122:101	1,207920792	327	1
72:61	1,180327869	287	1	80:67	1,194029851	307	1	29:24	1,208333333	328	4
85:72	1,180555556	287	1	123:103	1,194174757	307	1	110:91	1,208791209	328	1
98:83	1,180722892	288	1	43:36	1,194444444	308	2	81:67	1,208955224	329	1
111:94	1,180851064	288	1	92:77	1,194805195	308	1	52:43	1,209302326	329	2
124:105	1,180952381	288	1	49:41	1,195121951	309	2	127:105	1,20952381	329	1
13:11	1,181818182	289	9	104:87	1,195402299	309	1	75:62	1,209677419	330	1
123:104	1,182692308	290	1	55:46	1,195652174	309	2	98:81	1,209876543	330	1
110:93	1,182795699	291	1	116:97	1,195876289	310	1	121:100	1,21	330	1
97:82	1,182926829	291	1	61:51	1,196078431	310	2	23:19	1,210526316	331	5
84:71	1,183098592	291	1	128:107	1,196261682	310	1	109:90	1,211111111	332	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
86:71	1,211267606	332	1	38:31	1,225806452	352	3	98:79	1,240506329	373	1
63:52	1,211538462	332	2	103:84	1,226190476	353	1	67:54	1,240740741	373	1
103:85	1,211764706	333	1	65:53	1,226415094	353	1	103:83	1,240963855	374	1
40:33	1,212121212	333	3	92:75	1,226666667	354	1	36:29	1,24137931	374	3
97:80	1,2125	334	1	119:97	1,226804124	354	1	113:91	1,241758242	375	1
57:47	1,212765957	334	2	27:22	1,227272727	355	4	77:62	1,241935484	375	1
74:61	1,213114754	334	1	124:101	1,227722772	355	1	118:95	1,242105263	375	1
91:75	1,213333333	335	1	97:79	1,227848101	355	1	41:33	1,242424242	376	3
108:89	1,213483146	335	1	70:57	1,228070175	356	1	128:103	1,242718447	376	1
125:103	1,213592233	335	1	113:92	1,22826087	356	1	87:70	1,242857143	376	1
17:14	1,214285714	336	7	43:35	1,228571429	356	2	46:37	1,243243243	377	2
113:93	1,215053763	337	1	102:83	1,228915663	357	1	97:78	1,243589744	377	1
96:79	1,215189873	337	1	59:48	1,229166667	357	2	51:41	1,243902439	378	2
79:65	1,215384615	338	1	75:61	1,229508197	358	1	107:86	1,244186047	378	1
62:51	1,215686275	338	2	91:74	1,22972973	358	1	56:45	1,244444444	379	2
107:88	1,215909091	338	1	107:87	1,229885057	358	1	117:94	1,244680851	379	1
45:37	1,216216216	339	2	123:100	1,23	358	1	61:49	1,244897959	379	2
118:97	1,216494845	339	1	16:13	1,230769231	359	8	127:102	1,245098039	380	1
73:60	1,216666667	340	1	117:95	1,231578947	361	1	66:53	1,245283019	380	1
101:83	1,21686747	340	1	101:82	1,231707317	361	1	71:57	1,245614035	380	1
28:23	1,217391304	341	4	85:69	1,231884058	361	1	76:61	1,245901639	381	1
123:101	1,217821782	341	1	69:56	1,232142857	361	1	81:65	1,246153846	381	1
95:78	1,217948718	341	1	122:99	1,232323232	362	1	86:69	1,246376812	381	1
67:55	1,218181818	342	1	53:43	1,23255814	362	2	91:73	1,246575342	382	1
106:87	1,218390805	342	1	90:73	1,232876712	362	1	96:77	1,246753247	382	1
39:32	1,21875	342	3	127:103	1,233009709	363	1	101:81	1,24691358	382	1
128:105	1,219047619	343	1	37:30	1,233333333	363	3	106:85	1,247058824	382	1
89:73	1,219178082	343	1	95:77	1,233766234	364	1	111:89	1,247191011	382	1
50:41	1,219512195	344	2	58:47	1,234042553	364	2	116:93	1,247311828	383	1
111:91	1,21978022	344	1	79:64	1,234375	365	1	121:97	1,24742268	383	1
61:50	1,22	344	2	100:81	1,234567901	365	1	126:101	1,247524752	383	1
72:59	1,220338983	345	1	121:98	1,234693878	365	1	5:4	1,25	386	25
83:68	1,220588235	345	1	21:17	1,235294118	366	6	124:99	1,252525253	390	1
94:77	1,220779221	345	1	110:89	1,235955056	367	1	119:95	1,252631579	390	1
105:86	1,220930233	346	1	89:72	1,236111111	367	1	114:91	1,252747253	390	1
116:95	1,221052632	346	1	68:55	1,236363636	367	1	109:87	1,252873563	390	1
127:104	1,221153846	346	1	115:93	1,23655914	368	1	104:83	1,253012048	390	1
11:9	1,222222222	347	11	47:38	1,236842105	368	2	99:79	1,253164557	391	1
126:103	1,223300971	349	1	120:97	1,237113402	368	1	94:75	1,253333333	391	1
115:94	1,223404255	349	1	73:59	1,237288136	369	1	89:71	1,253521127	391	1
104:85	1,223529412	349	1	99:80	1,2375	369	1	84:67	1,253731343	391	1
93:76	1,223684211	349	1	125:101	1,237623762	369	1	79:63	1,253968254	392	1
82:67	1,223880597	350	1	26:21	1,238095238	370	4	74:59	1,254237288	392	1
71:58	1,224137931	350	1	109:88	1,238636364	371	1	69:55	1,254545455	393	1
60:49	1,224489796	351	2	83:67	1,23880597	371	1	64:51	1,254901961	393	2
109:89	1,224719101	351	1	57:46	1,239130435	371	2	123:98	1,255102041	393	1
49:40	1,225	351	2	88:71	1,23943662	372	1	59:47	1,255319149	394	2
87:71	1,225352113	352	1	119:96	1,239583333	372	1	113:90	1,255555556	394	1
125:102	1,225490196	352	1	31:25	1,24	372	4	54:43	1,255813953	394	2

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
103:82	1,256097561	395	1	61:48	1,270833333	415	2	85:66	1,287878788	438	1
49:39	1,256410256	395	2	75:59	1,271186441	415	1	76:59	1,288135593	438	1
93:74	1,256756757	396	1	89:70	1,271428571	416	1	67:52	1,288461538	439	1
44:35	1,257142857	396	2	103:81	1,271604938	416	1	125:97	1,288659794	439	1
127:101	1,257425743	397	1	117:92	1,27173913	416	1	58:45	1,288888889	439	2
83:66	1,257575758	397	1	14:11	1,272727273	418	9	107:83	1,289156627	440	1
122:97	1,257731959	397	1	121:95	1,273684211	419	1	49:38	1,289473684	440	2
39:31	1,258064516	397	3	107:84	1,273809524	419	1	89:69	1,289855072	441	1
112:89	1,258426966	398	1	93:73	1,273972603	419	1	40:31	1,290322581	441	3
73:58	1,25862069	398	1	79:62	1,274193548	420	1	111:86	1,290697674	442	1
107:85	1,258823529	398	1	65:51	1,274509804	420	1	71:55	1,290909091	442	1
34:27	1,259259259	399	3	116:91	1,274725275	420	1	102:79	1,291139241	442	1
97:77	1,25974026	400	1	51:40	1,275	421	2	31:24	1,291666667	443	4
63:50	1,26	400	2	88:69	1,275362319	421	1	115:89	1,292134831	444	1
92:73	1,260273973	400	1	125:98	1,275510204	421	1	84:65	1,292307692	444	1
121:96	1,260416667	401	1	37:29	1,275862069	422	3	53:41	1,292682927	444	2
29:23	1,260869565	401	4	97:76	1,276315789	422	1	128:99	1,292929293	445	1
111:88	1,261363636	402	1	60:47	1,276595745	423	2	75:58	1,293103448	445	1
82:65	1,261538462	402	1	83:65	1,276923077	423	1	97:75	1,293333333	445	1
53:42	1,261904762	403	2	106:83	1,277108434	423	1	119:92	1,293478261	446	1
77:61	1,262295082	403	1	23:18	1,277777778	424	5	22:17	1,294117647	446	5
101:80	1,2625	404	1	124:97	1,278350515	425	1	123:95	1,294736842	447	1
125:99	1,262626263	404	1	101:79	1,278481013	425	1	101:78	1,294871795	447	1
24:19	1,263157895	404	5	78:61	1,278688525	426	1	79:61	1,295081967	448	1
115:91	1,263736264	405	1	55:43	1,279069767	426	2	57:44	1,295454545	448	2
91:72	1,263888889	405	1	87:68	1,279411765	427	1	92:71	1,295774648	449	1
67:53	1,264150943	406	1	119:93	1,279569892	427	1	127:98	1,295918367	449	1
110:87	1,264367816	406	1	32:25	1,28	427	4	35:27	1,296296296	449	3
43:34	1,264705882	407	2	105:82	1,280487805	428	1	118:91	1,296703297	450	1
105:83	1,265060241	407	1	73:57	1,280701754	428	1	83:64	1,296875	450	1
62:49	1,265306122	407	2	114:89	1,280898876	429	1	48:37	1,297297297	451	2
81:64	1,265625	408	1	41:32	1,28125	429	3	109:84	1,297619048	451	1
100:79	1,265822785	408	1	91:71	1,281690141	430	1	61:47	1,29787234	451	2
119:94	1,265957447	408	1	50:39	1,282051282	430	2	74:57	1,298245614	452	1
19:15	1,266666667	409	6	109:85	1,282352941	431	1	87:67	1,298507463	452	1
128:101	1,267326733	410	1	59:46	1,282608696	431	2	100:77	1,298701299	452	1
109:86	1,26744186	410	1	127:99	1,282828283	431	1	113:87	1,298850575	453	1
90:71	1,267605634	411	1	68:53	1,283018868	431	1	126:97	1,298969072	453	1
71:56	1,267857143	411	1	77:60	1,283333333	432	1	13:10	1,3	454	9
123:97	1,268041237	411	1	86:67	1,28358209	432	1	121:93	1,301075269	456	1
52:41	1,268292683	411	2	95:74	1,283783784	432	1	108:83	1,301204819	456	1
85:67	1,268656716	412	1	104:81	1,283950617	433	1	95:73	1,301369863	456	1
118:93	1,268817204	412	1	113:88	1,284090909	433	1	82:63	1,301587302	456	1
33:26	1,269230769	413	3	122:95	1,284210526	433	1	69:53	1,301886792	457	1
113:89	1,269662921	413	1	9:7	1,285714286	435	14	125:96	1,302083333	457	1
80:63	1,26984127	414	1	121:94	1,287234043	437	1	56:43	1,302325581	457	2
127:100	1,27	414	1	112:87	1,287356322	437	1	99:76	1,302631579	458	1
47:37	1,27027027	414	2	103:80	1,2875	437	1	43:33	1,303030303	458	2
108:85	1,270588235	415	1	94:73	1,287671233	438	1	116:89	1,303370787	459	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
73:56	1,303571429	459	1	103:78	1,320512821	481	1	79:59	1,338983051	505	1
103:79	1,303797468	459	1	70:53	1,320754717	482	1	75:56	1,339285714	506	1
30:23	1,304347826	460	4	107:81	1,320987654	482	1	71:53	1,339622642	506	1
107:82	1,304878049	461	1	37:28	1,321428571	483	3	67:50	1,34	507	1
77:59	1,305084746	461	1	115:87	1,32183908	483	1	63:47	1,340425532	507	2
124:95	1,305263158	461	1	78:59	1,322033898	483	1	122:91	1,340659341	508	1
47:36	1,305555556	462	2	119:90	1,322222222	484	1	59:44	1,340909091	508	2
111:85	1,305882353	462	1	41:31	1,322580645	484	3	114:85	1,341176471	508	1
64:49	1,306122449	462	2	127:96	1,322916667	484	1	55:41	1,341463415	509	2
81:62	1,306451613	463	1	86:65	1,323076923	485	1	106:79	1,341772152	509	1
98:75	1,306666667	463	1	45:34	1,323529412	485	2	51:38	1,342105263	509	2
115:88	1,306818182	463	1	94:71	1,323943662	486	1	98:73	1,342465753	510	1
17:13	1,307692308	464	7	49:37	1,324324324	486	2	47:35	1,342857143	510	2
123:94	1,308510638	466	1	102:77	1,324675325	487	1	90:67	1,343283582	511	1
106:81	1,308641975	466	1	53:40	1,325	487	2	43:32	1,34375	512	2
89:68	1,308823529	466	1	110:83	1,325301205	488	1	125:93	1,344086022	512	1
72:55	1,309090909	466	1	57:43	1,325581395	488	2	82:61	1,344262295	512	1
127:97	1,309278351	467	1	118:89	1,325842697	488	1	121:90	1,344444444	512	1
55:42	1,30952381	467	2	61:46	1,326086957	489	2	39:29	1,344827586	513	3
93:71	1,309859155	467	1	126:95	1,326315789	489	1	113:84	1,345238095	513	1
38:29	1,310344828	468	3	65:49	1,326530612	489	1	74:55	1,345454545	514	1
97:74	1,310810811	469	1	69:52	1,326923077	490	1	109:81	1,345679012	514	1
59:45	1,311111111	469	2	73:55	1,327272727	490	1	35:26	1,346153846	515	3
80:61	1,31147541	469	1	77:58	1,327586207	491	1	101:75	1,346666667	515	1
101:77	1,311688312	470	1	81:61	1,327868852	491	1	66:49	1,346938776	516	1
122:93	1,311827957	470	1	85:64	1,328125	491	1	97:72	1,347222222	516	1
21:16	1,3125	471	6	89:67	1,328358209	492	1	128:95	1,347368421	516	1
109:83	1,313253012	472	1	93:70	1,328571429	492	1	31:23	1,347826087	517	4
88:67	1,313432836	472	1	97:73	1,328767123	492	1	120:89	1,348314607	517	1
67:51	1,31372549	472	1	101:76	1,328947368	492	1	89:66	1,348484848	518	1
113:86	1,313953488	473	1	105:79	1,329113924	493	1	58:43	1,348837209	518	2
46:35	1,314285714	473	2	109:82	1,329268293	493	1	85:63	1,349206349	519	1
117:89	1,314606742	474	1	113:85	1,329411765	493	1	112:83	1,34939759	519	1
71:54	1,314814815	474	1	117:88	1,329545455	493	1	27:20	1,35	520	4
96:73	1,315068493	474	1	121:91	1,32967033	493	1	104:77	1,350649351	520	1
121:92	1,315217391	474	1	125:94	1,329787234	493	1	77:57	1,350877193	521	1
25:19	1,315789474	475	5	4:3	1,333333333	498	32	127:94	1,35106383	521	1
104:79	1,316455696	476	1	127:95	1,336842105	503	1	50:37	1,351351351	521	2
79:60	1,316666667	476	1	123:92	1,336956522	503	1	123:91	1,351648352	522	1
54:41	1,317073171	477	2	119:89	1,337078652	503	1	73:54	1,351851852	522	1
83:63	1,317460317	477	1	115:86	1,337209302	503	1	96:71	1,352112676	522	1
112:85	1,317647059	478	1	111:83	1,337349398	503	1	119:88	1,352272727	522	1
29:22	1,318181818	478	4	107:80	1,3375	503	1	23:17	1,352941176	523	5
120:91	1,318681319	479	1	103:77	1,337662338	504	1	111:82	1,353658537	524	1
91:69	1,31884058	479	1	99:74	1,337837838	504	1	88:65	1,353846154	524	1
62:47	1,319148936	480	2	95:71	1,338028169	504	1	65:48	1,354166667	525	1
95:72	1,319444444	480	1	91:68	1,338235294	504	1	107:79	1,35443038	525	1
128:97	1,319587629	480	1	87:65	1,338461538	505	1	42:31	1,35483871	526	3
33:25	1,32	481	3	83:62	1,338709677	505	1	103:76	1,355263158	526	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
61:45	1,35555556	527	2	103:75	1,373333333	549	1	110:79	1,392405063	573	1
80:59	1,355932203	527	1	114:83	1,373493976	549	1	39:28	1,392857143	574	3
99:73	1,356164384	527	1	125:91	1,373626374	550	1	124:89	1,393258427	574	1
118:87	1,356321839	528	1	11:8	1,375	551	11	85:61	1,393442623	574	1
19:14	1,357142857	529	6	128:93	1,376344086	553	1	46:33	1,393939394	575	2
110:81	1,358024691	530	1	117:85	1,376470588	553	1	99:71	1,394366197	576	1
91:67	1,358208955	530	1	106:77	1,376623377	553	1	53:38	1,394736842	576	2
72:53	1,358490566	530	1	95:69	1,376811594	554	1	113:81	1,395061728	576	1
125:92	1,358695652	531	1	84:61	1,37704918	554	1	60:43	1,395348837	577	2
53:39	1,358974359	531	2	73:53	1,377358491	554	1	127:91	1,395604396	577	1
87:64	1,359375	532	1	62:45	1,377777778	555	2	67:48	1,395833333	577	1
121:89	1,359550562	532	1	113:82	1,37804878	555	1	74:53	1,396226415	578	1
34:25	1,36	532	3	51:37	1,378378378	556	2	81:58	1,396551724	578	1
117:86	1,360465116	533	1	91:66	1,378787879	556	1	88:63	1,396825397	579	1
83:61	1,360655738	533	1	40:29	1,379310345	557	3	95:68	1,397058824	579	1
49:36	1,361111111	534	2	109:79	1,379746835	557	1	102:73	1,397260274	579	1
113:83	1,361445783	534	1	69:50	1,38	558	1	109:78	1,397435897	579	1
64:47	1,361702128	534	2	98:71	1,38028169	558	1	116:83	1,397590361	580	1
79:58	1,362068966	535	1	127:92	1,380434783	558	1	123:88	1,397727273	580	1
94:69	1,362318841	535	1	29:21	1,380952381	559	4	7:5	1,4	583	18
109:80	1,3625	536	1	105:76	1,381578947	560	1	122:87	1,402298851	585	1
124:91	1,362637363	536	1	76:55	1,381818182	560	1	115:82	1,402439024	586	1
15:11	1,363636364	537	8	123:89	1,382022472	560	1	108:77	1,402597403	586	1
116:85	1,364705882	538	1	47:34	1,382352941	561	2	101:72	1,402777778	586	1
101:74	1,364864865	539	1	112:81	1,382716049	561	1	94:67	1,402985075	586	1
86:63	1,365079365	539	1	65:47	1,382978723	561	1	87:62	1,403225806	586	1
71:52	1,365384615	539	1	83:60	1,383333333	562	1	80:57	1,403508772	587	1
127:93	1,365591398	539	1	101:73	1,383561644	562	1	73:52	1,403846154	587	1
56:41	1,365853659	540	2	119:86	1,38372093	562	1	66:47	1,404255319	588	1
97:71	1,366197183	540	1	18:13	1,384615385	563	7	125:89	1,404494382	588	1
41:30	1,366666667	541	3	115:83	1,385542169	565	1	59:42	1,404761905	588	2
108:79	1,367088608	541	1	97:70	1,385714286	565	1	111:79	1,405063291	589	1
67:49	1,367346939	542	1	79:57	1,385964912	565	1	52:37	1,405405405	589	2
93:68	1,367647059	542	1	61:44	1,386363636	566	2	97:69	1,405797101	590	1
119:87	1,367816092	542	1	104:75	1,386666667	566	1	45:32	1,40625	590	2
26:19	1,368421053	543	4	43:31	1,387096774	566	2	128:91	1,406593407	591	1
115:84	1,369047619	544	1	111:80	1,3875	567	1	83:59	1,406779661	591	1
89:65	1,369230769	544	1	68:49	1,387755102	567	1	121:86	1,406976744	591	1
63:46	1,369565217	544	2	93:67	1,388059701	568	1	38:27	1,407407407	592	3
100:73	1,369863014	545	1	118:85	1,388235294	568	1	107:76	1,407894737	592	1
37:27	1,37037037	545	3	25:18	1,388888889	569	5	69:49	1,408163265	593	1
122:89	1,370786517	546	1	107:77	1,38961039	570	1	100:71	1,408450704	593	1
85:62	1,370967742	546	1	82:59	1,389830508	570	1	31:22	1,409090909	594	4
48:35	1,371428571	547	2	57:41	1,390243902	570	2	117:83	1,409638554	594	1
107:78	1,371794872	547	1	89:64	1,390625	571	1	86:61	1,409836066	595	1
59:43	1,372093023	548	2	121:87	1,390804598	571	1	55:39	1,41025641	595	2
70:51	1,37254902	548	1	32:23	1,391304348	572	4	79:56	1,410714286	596	1
81:59	1,372881356	549	1	103:74	1,391891892	572	1	103:73	1,410958904	596	1
92:67	1,373134328	549	1	71:51	1,392156863	573	1	127:90	1,411111111	596	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
24:17	1,411764706	597	5	63:44	1,431818182	621	2	45:31	1,451612903	645	2
113:80	1,4125	598	1	116:81	1,432098765	622	1	106:73	1,452054795	646	1
89:63	1,412698413	598	1	53:37	1,432432432	622	2	61:42	1,452380952	646	2
65:46	1,413043478	599	1	96:67	1,432835821	623	1	77:53	1,452830189	647	1
106:75	1,413333333	599	1	43:30	1,433333333	623	2	93:64	1,453125	647	1
41:29	1,413793103	599	3	119:83	1,43373494	624	1	109:75	1,453333333	647	1
99:70	1,414285714	600	1	76:53	1,433962264	624	1	125:86	1,453488372	647	1
58:41	1,414634146	601	2	109:76	1,434210526	624	1	16:11	1,454545455	649	8
75:53	1,41509434	601	1	33:23	1,434782609	625	3	115:79	1,455696203	650	1
92:65	1,415384615	601	1	122:85	1,435294118	626	1	99:68	1,455882353	650	1
109:77	1,415584416	602	1	89:62	1,435483871	626	1	83:57	1,456140351	651	1
126:89	1,415730337	602	1	56:39	1,435897436	626	2	67:46	1,456521739	651	1
17:12	1,416666667	603	7	79:55	1,436363636	627	1	118:81	1,456790123	651	1
112:79	1,417721519	604	1	102:71	1,436619718	627	1	51:35	1,457142857	652	2
95:67	1,417910448	605	1	125:87	1,436781609	627	1	86:59	1,457627119	652	1
78:55	1,418181818	605	1	23:16	1,4375	628	5	121:83	1,457831325	653	1
61:43	1,418604651	605	2	128:89	1,438202247	629	1	35:24	1,458333333	653	3
105:74	1,418918919	606	1	105:73	1,438356164	629	1	124:85	1,458823529	654	1
44:31	1,419354839	606	2	82:57	1,438596491	630	1	89:61	1,459016393	654	1
115:81	1,419753086	607	1	59:41	1,43902439	630	2	54:37	1,459459459	655	2
71:50	1,42	607	1	95:66	1,439393939	631	1	127:87	1,459770115	655	1
98:69	1,420289855	607	1	36:25	1,44	631	3	73:50	1,46	655	1
125:88	1,420454545	608	1	121:84	1,44047619	632	1	92:63	1,46031746	656	1
27:19	1,421052632	608	4	85:59	1,440677966	632	1	111:76	1,460526316	656	1
118:83	1,421686747	609	1	49:34	1,441176471	633	2	19:13	1,461538462	657	6
91:64	1,421875	609	1	111:77	1,441558442	633	1	117:80	1,4625	658	1
64:45	1,422222222	610	2	62:43	1,441860465	634	2	98:67	1,462686567	658	1
101:71	1,422535211	610	1	75:52	1,442307692	634	1	79:54	1,462962963	659	1
37:26	1,423076923	611	3	88:61	1,442622951	634	1	60:41	1,463414634	659	2
121:85	1,423529412	611	1	101:70	1,442857143	635	1	101:69	1,463768116	660	1
84:59	1,423728814	612	1	114:79	1,443037975	635	1	41:28	1,464285714	660	3
47:33	1,424242424	612	2	127:88	1,443181818	635	1	104:71	1,464788732	661	1
104:73	1,424657534	613	1	13:9	1,444444444	637	9	63:43	1,465116279	661	2
57:40	1,425	613	2	120:83	1,445783133	638	1	85:58	1,465517241	662	1
124:87	1,425287356	614	1	107:74	1,445945946	638	1	107:73	1,465753425	662	1
67:47	1,425531915	614	1	94:65	1,446153846	639	1	22:15	1,466666667	663	5
77:54	1,425925926	614	1	81:56	1,446428571	639	1	113:77	1,467532468	664	1
87:61	1,426229508	615	1	68:47	1,446808511	639	1	91:62	1,467741935	664	1
97:68	1,426470588	615	1	123:85	1,447058824	640	1	69:47	1,468085106	665	1
107:75	1,426666667	615	1	55:38	1,447368421	640	2	116:79	1,468354443	665	1
117:82	1,426829268	615	1	97:67	1,447761194	641	1	47:32	1,46875	666	2
127:89	1,426966292	616	1	42:29	1,448275862	641	3	119:81	1,469135802	666	1
10:7	1,428571429	617	12	113:78	1,448717949	642	1	72:49	1,469387755	666	1
123:86	1,430232558	619	1	71:49	1,448979592	642	1	97:66	1,46969697	667	1
113:79	1,430379747	620	1	100:69	1,449275362	642	1	122:83	1,469879518	667	1
103:72	1,430555556	620	1	29:20	1,45	643	4	25:17	1,470588235	668	5
93:65	1,430769231	620	1	103:71	1,450704225	644	1	128:87	1,471264368	668	1
83:58	1,431034483	620	1	74:51	1,450980392	644	1	103:70	1,471428571	669	1
73:51	1,431372549	621	1	119:82	1,451219512	645	1	78:53	1,471698113	669	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
53:36	1,472222222	670	2	91:61	1,491803279	692	1	44:29	1,517241379	722	2
81:55	1,472727273	670	1	94:63	1,492063492	693	1	85:56	1,517857143	722	1
109:74	1,472972973	670	1	97:65	1,492307692	693	1	126:83	1,518072289	723	1
28:19	1,473684211	671	4	100:67	1,492537313	693	1	41:27	1,518518519	723	3
115:78	1,474358974	672	1	103:69	1,492753623	694	1	120:79	1,518987342	724	1
87:59	1,474576271	672	1	106:71	1,492957746	694	1	79:52	1,519230769	724	1
59:40	1,475	673	2	109:73	1,493150685	694	1	117:77	1,519480519	724	1
90:61	1,475409836	673	1	112:75	1,493333333	694	1	38:25	1,52	725	3
121:82	1,475609756	674	1	115:77	1,493506494	694	1	111:73	1,520547945	726	1
31:21	1,476190476	674	4	118:79	1,493670886	695	1	73:48	1,520833333	726	1
127:86	1,476744186	675	1	121:81	1,49382716	695	1	108:71	1,521126761	726	1
96:65	1,476923077	675	1	124:83	1,493975904	695	1	35:23	1,52173913	727	3
65:44	1,477272727	676	1	127:85	1,494117647	695	1	102:67	1,52238806	728	1
99:67	1,47761194	676	1	3:2	1,5	702	42	67:44	1,522727273	728	1
34:23	1,47826087	677	3	128:85	1,505882353	709	1	99:65	1,523076923	728	1
105:71	1,478873239	677	1	125:83	1,506024096	709	1	32:21	1,523809524	729	4
71:48	1,479166667	678	1	122:81	1,50617284	709	1	125:82	1,524390244	730	1
108:73	1,479452055	678	1	119:79	1,506329114	709	1	93:61	1,524590164	730	1
37:25	1,48	679	3	116:77	1,506493506	709	1	61:40	1,525	731	2
114:77	1,480519481	679	1	113:75	1,506666667	710	1	90:59	1,525423729	731	1
77:52	1,480769231	680	1	110:73	1,506849315	710	1	119:78	1,525641026	731	1
117:79	1,481012658	680	1	107:71	1,507042254	710	1	29:19	1,526315789	732	4
40:27	1,481481481	680	3	104:69	1,507246377	710	1	113:74	1,527027027	733	1
123:83	1,481927711	681	1	101:67	1,507462687	711	1	84:55	1,527272727	733	1
83:56	1,482142857	681	1	98:65	1,507692308	711	1	55:36	1,527777778	734	2
126:85	1,482352941	681	1	95:63	1,507936508	711	1	81:53	1,528301887	734	1
43:29	1,482758621	682	2	92:61	1,508196721	711	1	107:70	1,528571429	735	1
89:60	1,483333333	683	1	89:59	1,508474576	712	1	26:17	1,529411765	736	4
46:31	1,483870968	683	2	86:57	1,50877193	712	1	127:83	1,530120482	736	1
95:64	1,484375	684	1	83:55	1,509090909	712	1	101:66	1,53030303	737	1
49:33	1,484848485	684	2	80:53	1,509433962	713	1	75:49	1,530612245	737	1
101:68	1,485294118	685	1	77:51	1,509803922	713	1	124:81	1,530864198	737	1
52:35	1,485714286	685	2	74:49	1,510204082	714	1	49:32	1,53125	738	2
107:72	1,486111111	686	1	71:47	1,510638298	714	1	121:79	1,53164557	738	1
55:37	1,486486486	686	2	68:45	1,511111111	715	1	72:47	1,531914894	738	1
113:76	1,486842105	687	1	65:43	1,511627907	715	1	95:62	1,532258065	739	1
58:39	1,487179487	687	2	127:84	1,511904762	716	1	118:77	1,532467532	739	1
119:80	1,4875	687	1	62:41	1,512195122	716	2	23:15	1,533333333	740	5
61:41	1,487804878	688	2	121:80	1,5125	716	1	112:73	1,534246575	741	1
125:84	1,488095238	688	1	59:39	1,512820513	717	2	89:58	1,534482759	741	1
64:43	1,488372093	688	2	115:76	1,513157895	717	1	66:43	1,534883721	742	1
67:45	1,488888889	689	1	56:37	1,513513514	717	2	109:71	1,535211268	742	1
70:47	1,489361702	690	1	109:72	1,513888889	718	1	43:28	1,535714286	743	2
73:49	1,489795918	690	1	53:35	1,514285714	718	2	106:69	1,536231884	743	1
76:51	1,490196078	691	1	103:68	1,514705882	719	1	63:41	1,536585366	744	2
79:53	1,490566038	691	1	50:33	1,515151515	719	2	83:54	1,537037037	744	1
82:55	1,490909091	691	1	97:64	1,515625	720	1	103:67	1,537313433	744	1
85:57	1,49122807	692	1	47:31	1,516129032	720	2	123:80	1,5375	745	1
88:59	1,491525424	692	1	91:60	1,516666667	721	1	20:13	1,538461538	746	6

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
117:76	1,539473684	747	1	25:16	1,5625	773	5	119:75	1,586666667	799	1
97:63	1,53968254	747	1	111:71	1,563380282	774	1	73:46	1,586956522	800	1
77:50	1,54	748	1	86:55	1,563636364	774	1	100:63	1,587301587	800	1
57:37	1,540540541	748	2	61:39	1,564102564	774	2	127:80	1,5875	800	1
94:61	1,540983607	749	1	97:62	1,564516129	775	1	27:17	1,588235294	801	4
37:24	1,541666667	749	3	36:23	1,565217391	776	3	116:73	1,589041096	802	1
128:83	1,542168675	750	1	119:76	1,565789474	776	1	89:56	1,589285714	802	1
91:59	1,542372881	750	1	83:53	1,566037736	777	1	62:39	1,58974359	803	2
54:35	1,542857143	751	2	47:30	1,566666667	777	2	97:61	1,590163934	803	1
125:81	1,543209877	751	1	105:67	1,567164179	778	1	35:22	1,590909091	804	3
71:46	1,543478261	751	1	58:37	1,567567568	778	2	113:71	1,591549296	805	1
88:57	1,543859649	752	1	127:81	1,567901235	779	1	78:49	1,591836735	805	1
105:68	1,544117647	752	1	69:44	1,568181818	779	1	121:76	1,592105263	805	1
122:79	1,544303797	752	1	80:51	1,568627451	779	1	43:27	1,592592593	806	2
17:11	1,545454545	754	7	91:58	1,568965517	780	1	94:59	1,593220339	806	1
116:75	1,546666667	755	1	102:65	1,569230769	780	1	51:32	1,59375	807	2
99:64	1,546875	755	1	113:72	1,569444444	780	1	110:69	1,594202899	807	1
82:53	1,547169811	756	1	124:79	1,569620253	780	1	59:37	1,594594595	808	2
65:42	1,547619048	756	1	11:7	1,571428571	782	11	126:79	1,594936709	808	1
113:73	1,547945205	756	1	118:75	1,573333333	785	1	67:42	1,595238095	809	1
48:31	1,548387097	757	2	107:68	1,573529412	785	1	75:47	1,595744681	809	1
127:82	1,548780488	757	1	96:61	1,573770492	785	1	83:52	1,596153846	810	1
79:51	1,549019608	758	1	85:54	1,574074074	785	1	91:57	1,596491228	810	1
110:71	1,549295775	758	1	74:47	1,574468085	786	1	99:62	1,596774194	810	1
31:20	1,55	759	4	63:40	1,575	786	2	107:67	1,597014925	810	1
107:69	1,550724638	760	1	115:73	1,575342466	787	1	115:72	1,597222222	811	1
76:49	1,551020408	760	1	52:33	1,575757576	787	2	123:77	1,597402597	811	1
121:78	1,551282051	760	1	93:59	1,576271186	788	1	8:5	1,6	814	16
45:29	1,551724138	761	2	41:26	1,576923077	789	3	125:78	1,602564103	816	1
104:67	1,552238806	761	1	112:71	1,577464789	789	1	117:73	1,602739726	817	1
59:38	1,552631579	762	2	71:45	1,577777778	789	1	109:68	1,602941176	817	1
73:47	1,553191489	762	1	101:64	1,578125	790	1	101:63	1,603174603	817	1
87:56	1,553571429	763	1	30:19	1,578947368	791	4	93:58	1,603448276	817	1
101:65	1,553846154	763	1	109:69	1,579710145	792	1	85:53	1,603773585	818	1
115:74	1,554054054	763	1	79:50	1,58	792	1	77:48	1,604166667	818	1
14:9	1,555555556	765	9	128:81	1,580246914	792	1	69:43	1,604651163	819	1
123:79	1,556962025	766	1	49:31	1,580645161	793	2	61:38	1,605263158	819	2
109:70	1,557142857	767	1	117:74	1,581081081	793	1	114:71	1,605633803	820	1
95:61	1,557377049	767	1	68:43	1,581395349	793	1	53:33	1,606060606	820	2
81:52	1,557692308	767	1	87:55	1,581818182	794	1	98:61	1,606557377	821	1
67:43	1,558139535	768	1	106:67	1,582089552	794	1	45:28	1,607142857	821	2
120:77	1,558441558	768	1	125:79	1,582278481	794	1	127:79	1,607594937	822	1
53:34	1,558823529	769	2	19:12	1,583333333	796	6	82:51	1,607843137	822	1
92:59	1,559322034	769	1	122:77	1,584415584	797	1	119:74	1,608108108	822	1
39:25	1,56	770	3	103:65	1,584615385	797	1	37:23	1,608695652	823	3
103:66	1,560606061	771	1	84:53	1,58490566	797	1	103:64	1,609375	824	1
64:41	1,56097561	771	2	65:41	1,585365854	798	1	66:41	1,609756098	824	1
89:57	1,561403509	771	1	111:70	1,585714286	798	1	95:59	1,610169492	825	1
114:73	1,561643836	772	1	46:29	1,586206897	799	2	124:77	1,61038961	825	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
29:18	1,611111111	826	4	18:11	1,636363636	853	7	103:62	1,661290323	879	1
108:67	1,611940299	827	1	113:69	1,637681159	854	1	108:65	1,661538462	879	1
79:49	1,612244898	827	1	95:58	1,637931034	854	1	113:68	1,661764706	879	1
50:31	1,612903226	828	2	77:47	1,638297872	855	1	118:71	1,661971831	879	1
121:75	1,613333333	828	1	59:36	1,638888889	855	2	123:74	1,662162162	880	1
71:44	1,613636364	828	1	100:61	1,639344262	856	1	128:77	1,662337662	880	1
92:57	1,614035088	829	1	41:25	1,64	856	3	5:3	1,666666667	884	25
113:70	1,614285714	829	1	105:64	1,640625	857	1	127:76	1,671052632	889	1
21:13	1,615384615	830	6	64:39	1,641025641	858	2	122:73	1,671232877	889	1
118:73	1,616438356	831	1	87:53	1,641509434	858	1	117:70	1,671428571	889	1
97:60	1,616666667	832	1	110:67	1,641791045	858	1	112:67	1,671641791	890	1
76:47	1,617021277	832	1	23:14	1,642857143	859	5	107:64	1,671875	890	1
55:34	1,617647059	833	2	120:73	1,643835616	860	1	102:61	1,672131148	890	1
89:55	1,618181818	833	1	97:59	1,644067797	861	1	97:58	1,672413793	890	1
123:76	1,618421053	834	1	74:45	1,644444444	861	1	92:55	1,672727273	891	1
34:21	1,619047619	834	3	125:76	1,644736842	861	1	87:52	1,673076923	891	1
115:71	1,61971831	835	1	51:31	1,64516129	862	2	82:49	1,673469388	891	1
81:50	1,62	835	1	79:48	1,645833333	863	1	77:46	1,673913043	892	1
128:79	1,620253165	835	1	107:65	1,646153846	863	1	72:43	1,674418605	892	1
47:29	1,620689655	836	2	28:17	1,647058824	864	4	67:40	1,675	893	1
107:66	1,621212121	836	1	117:71	1,647887324	865	1	62:37	1,675675676	894	2
60:37	1,621621622	837	2	89:54	1,648148148	865	1	119:71	1,676056338	894	1
73:45	1,622222222	838	1	61:37	1,648648649	866	2	57:34	1,676470588	895	2
86:53	1,622641509	838	1	94:57	1,649122807	866	1	109:65	1,676923077	895	1
99:61	1,62295082	838	1	127:77	1,649350649	866	1	52:31	1,677419355	895	2
112:69	1,623188406	839	1	33:20	1,65	867	3	99:59	1,677966102	896	1
125:77	1,623376623	839	1	104:63	1,650793651	868	1	47:28	1,678571429	897	2
13:8	1,625	841	9	71:43	1,651162791	868	1	89:53	1,679245283	897	1
122:75	1,626666667	842	1	109:66	1,651515152	869	1	42:25	1,68	898	3
109:67	1,626865672	843	1	38:23	1,652173913	869	3	121:72	1,680555556	899	1
96:59	1,627118644	843	1	119:72	1,652777778	870	1	79:47	1,680851064	899	1
83:51	1,62745098	843	1	81:49	1,653061224	870	1	116:69	1,68115942	899	1
70:43	1,627906977	844	1	124:75	1,653333333	870	1	37:22	1,681818182	900	3
127:78	1,628205128	844	1	43:26	1,653846154	871	2	106:63	1,682539683	901	1
57:35	1,628571429	844	2	91:55	1,654545455	872	1	69:41	1,682926829	901	1
101:62	1,629032258	845	1	48:29	1,655172414	872	2	101:60	1,683333333	902	1
44:27	1,62962963	845	2	101:61	1,655737705	873	1	32:19	1,684210526	902	4
119:73	1,630136986	846	1	53:32	1,65625	874	2	123:73	1,684931507	903	1
75:46	1,630434783	846	1	111:67	1,656716418	874	1	91:54	1,685185185	903	1
106:65	1,630769231	847	1	58:35	1,657142857	874	2	59:35	1,685714286	904	2
31:19	1,631578947	848	4	121:73	1,657534247	875	1	86:51	1,68627451	905	1
111:68	1,632352941	848	1	63:38	1,657894737	875	2	113:67	1,686567164	905	1
80:49	1,632653061	849	1	68:41	1,658536585	876	1	27:16	1,6875	906	4
49:30	1,633333333	849	2	73:44	1,659090909	876	1	103:61	1,68852459	907	1
116:71	1,633802817	850	1	78:47	1,659574468	877	1	76:45	1,688888889	907	1
67:41	1,634146341	850	1	83:50	1,66	877	1	125:74	1,689189189	908	1
85:52	1,634615385	851	1	88:53	1,660377358	878	1	49:29	1,689655172	908	2
103:63	1,634920635	851	1	93:56	1,660714286	878	1	120:71	1,690140845	909	1
121:74	1,635135135	851	1	98:59	1,661016949	878	1	71:42	1,69047619	909	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
93:55	1,690909091	909	1	98:57	1,719298246	938	1	110:63	1,746031746	965	1
115:68	1,691176471	910	1	43:25	1,72	939	2	117:67	1,746268657	965	1
22:13	1,692307692	911	5	117:68	1,720588235	939	1	124:71	1,746478873	965	1
127:75	1,693333333	912	1	74:43	1,720930233	940	1	7:4	1,75	969	18
105:62	1,693548387	912	1	105:61	1,721311475	940	1	128:73	1,753424658	972	1
83:49	1,693877551	912	1	31:18	1,722222222	941	4	121:69	1,753623188	972	1
61:36	1,694444444	913	2	112:65	1,723076923	942	1	114:65	1,753846154	973	1
100:59	1,694915254	913	1	81:47	1,723404255	942	1	107:61	1,754098361	973	1
39:23	1,695652174	914	3	50:29	1,724137931	943	2	100:57	1,754385965	973	1
95:56	1,696428571	915	1	119:69	1,724637681	944	1	93:53	1,754716981	973	1
56:33	1,696969697	916	2	69:40	1,725	944	1	86:49	1,755102041	974	1
73:43	1,697674419	916	1	88:51	1,725490196	944	1	79:45	1,755555556	974	1
90:53	1,698113208	917	1	107:62	1,725806452	945	1	72:41	1,756097561	975	1
107:63	1,698412698	917	1	126:73	1,726027397	945	1	65:37	1,756756757	975	1
124:73	1,698630137	917	1	19:11	1,727272727	946	6	123:70	1,757142857	976	1
17:10	1,7	919	7	121:70	1,728571429	947	1	58:33	1,757575758	976	2
114:67	1,701492537	920	1	102:59	1,728813559	948	1	109:62	1,758064516	977	1
97:57	1,701754386	920	1	83:48	1,729166667	948	1	51:29	1,75862069	977	2
80:47	1,70212766	921	1	64:37	1,72972973	949	2	95:54	1,759259259	978	1
63:37	1,702702703	921	2	109:63	1,73015873	949	1	44:25	1,76	979	2
109:64	1,703125	922	1	45:26	1,730769231	950	2	125:71	1,76056338	979	1
46:27	1,703703704	922	2	116:67	1,731343284	950	1	81:46	1,760869565	980	1
121:71	1,704225352	923	1	71:41	1,731707317	951	1	118:67	1,76119403	980	1
75:44	1,704545455	923	1	97:56	1,732142857	951	1	37:21	1,761904762	981	3
104:61	1,704918033	924	1	123:71	1,732394366	951	1	104:59	1,762711864	981	1
29:17	1,705882353	925	4	26:15	1,733333333	952	4	67:38	1,763157895	982	1
128:75	1,706666667	925	1	111:64	1,734375	953	1	97:55	1,763636364	982	1
99:58	1,706896552	926	1	85:49	1,734693878	954	1	127:72	1,763888889	983	1
70:41	1,707317073	926	1	59:34	1,735294118	954	2	30:17	1,764705882	983	4
111:65	1,707692308	926	1	92:53	1,735849057	955	1	113:64	1,765625	984	1
41:24	1,708333333	927	3	125:72	1,736111111	955	1	83:47	1,765957447	985	1
94:55	1,709090909	928	1	33:19	1,736842105	956	3	53:30	1,766666667	985	2
53:31	1,709677419	928	2	106:61	1,737704918	957	1	76:43	1,76744186	986	1
118:69	1,710144928	929	1	73:42	1,738095238	957	1	99:56	1,767857143	986	1
65:38	1,710526316	929	1	113:65	1,738461538	957	1	122:69	1,768115942	987	1
77:45	1,711111111	930	1	40:23	1,739130435	958	3	23:13	1,769230769	988	5
89:52	1,711538462	930	1	127:73	1,739726027	959	1	108:61	1,770491803	989	1
101:59	1,711864407	931	1	87:50	1,74	959	1	85:48	1,770833333	989	1
113:66	1,712121212	931	1	47:27	1,740740741	960	2	62:35	1,771428571	990	2
125:73	1,712328767	931	1	101:58	1,74137931	960	1	101:57	1,771929825	990	1
12:7	1,714285714	933	10	54:31	1,741935484	961	2	39:22	1,772727273	991	3
127:74	1,716216216	935	1	115:66	1,742424242	961	1	94:53	1,773584906	992	1
115:67	1,71641791	935	1	61:35	1,742857143	962	2	55:31	1,774193548	993	2
103:60	1,716666667	936	1	68:39	1,743589744	962	1	126:71	1,774647887	993	1
91:53	1,716981132	936	1	75:43	1,744186047	963	1	71:40	1,775	993	1
79:46	1,717391304	936	1	82:47	1,744680851	964	1	87:49	1,775510204	994	1
67:39	1,717948718	937	1	89:51	1,745098039	964	1	103:58	1,775862069	994	1
122:71	1,718309859	937	1	96:55	1,745454545	964	1	119:67	1,776119403	994	1
55:32	1,71875	938	2	103:59	1,745762712	965	1	16:9	1,777777778	996	8

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
121:68	1,779411765	998	1	105:58	1,810344828	1028	1	35:19	1,842105263	1058	3
105:59	1,779661017	998	1	67:37	1,810810811	1028	1	94:51	1,843137255	1059	1
89:50	1,78	998	1	96:53	1,811320755	1028	1	59:32	1,84375	1059	2
73:41	1,780487805	999	1	125:69	1,811594203	1029	1	83:45	1,844444444	1060	1
57:32	1,78125	999	2	29:16	1,8125	1030	4	107:58	1,844827586	1060	1
98:55	1,781818182	1000	1	107:59	1,813559322	1031	1	24:13	1,846153846	1061	5
41:23	1,782608696	1001	3	78:43	1,813953488	1031	1	109:59	1,847457627	1063	1
107:60	1,783333333	1001	1	127:70	1,814285714	1031	1	85:46	1,847826087	1063	1
66:37	1,783783784	1002	1	49:27	1,814814815	1032	2	61:33	1,848484848	1064	2
91:51	1,784313725	1002	1	118:65	1,815384615	1032	1	98:53	1,849056604	1064	1
116:65	1,784615385	1003	1	69:38	1,815789474	1033	1	37:20	1,85	1065	3
25:14	1,785714286	1004	5	89:49	1,816326531	1033	1	124:67	1,850746269	1066	1
109:61	1,786885246	1005	1	109:60	1,816666667	1034	1	87:47	1,85106383	1066	1
84:47	1,787234043	1005	1	20:11	1,818181818	1035	6	50:27	1,851851852	1067	2
59:33	1,787878788	1006	2	111:61	1,819672131	1036	1	113:61	1,852459016	1067	1
93:52	1,788461538	1006	1	91:50	1,82	1037	1	63:34	1,852941176	1068	2
127:71	1,788732394	1007	1	71:39	1,820512821	1037	1	76:41	1,853658537	1068	1
34:19	1,789473684	1007	3	122:67	1,820895522	1038	1	89:48	1,854166667	1069	1
111:62	1,790322581	1008	1	51:28	1,821428571	1038	2	102:55	1,854545455	1069	1
77:43	1,790697674	1009	1	82:45	1,822222222	1039	1	115:62	1,85483871	1070	1
120:67	1,791044776	1009	1	113:62	1,822580645	1039	1	128:69	1,855072464	1070	1
43:24	1,791666667	1010	2	31:17	1,823529412	1040	4	13:7	1,857142857	1072	9
95:53	1,79245283	1010	1	104:57	1,824561404	1041	1	119:64	1,859375	1074	1
52:29	1,793103448	1011	2	73:40	1,825	1041	1	106:57	1,859649123	1074	1
113:63	1,793650794	1011	1	115:63	1,825396825	1042	1	93:50	1,86	1074	1
61:34	1,794117647	1012	2	42:23	1,826086957	1043	3	80:43	1,860465116	1075	1
70:39	1,794871795	1013	1	95:52	1,826923077	1043	1	67:36	1,861111111	1075	1
79:44	1,795454545	1013	1	53:29	1,827586207	1044	2	121:65	1,861538462	1076	1
88:49	1,795918367	1014	1	117:64	1,828125	1044	1	54:29	1,862068966	1076	2
97:54	1,796296296	1014	1	64:35	1,828571429	1045	2	95:51	1,862745098	1077	1
106:59	1,796610169	1014	1	75:41	1,829268293	1046	1	41:22	1,863636364	1078	3
115:64	1,796875	1015	1	86:47	1,829787234	1046	1	110:59	1,86440678	1078	1
124:69	1,797101449	1015	1	97:53	1,830188679	1046	1	69:37	1,864864865	1079	1
9:5	1,8	1018	14	108:59	1,830508475	1047	1	97:52	1,865384615	1079	1
128:71	1,802816901	1020	1	119:65	1,830769231	1047	1	125:67	1,865671642	1080	1
119:66	1,803030303	1021	1	11:6	1,833333333	1049	11	28:15	1,866666667	1081	4
110:61	1,803278689	1021	1	123:67	1,835820896	1052	1	127:68	1,867647059	1081	1
101:56	1,803571429	1021	1	112:61	1,836065574	1052	1	99:53	1,867924528	1082	1
92:51	1,803921569	1021	1	101:55	1,836363636	1052	1	71:38	1,868421053	1082	1
83:46	1,804347826	1022	1	90:49	1,836734694	1053	1	114:61	1,868852459	1083	1
74:41	1,804878049	1022	1	79:43	1,837209302	1053	1	43:23	1,869565217	1083	2
65:36	1,805555556	1023	1	68:37	1,837837838	1054	1	101:54	1,87037037	1084	1
121:67	1,805970149	1023	1	125:68	1,838235294	1054	1	58:31	1,870967742	1085	2
56:31	1,806451613	1024	2	57:31	1,838709677	1054	2	73:39	1,871794872	1085	1
103:57	1,807017544	1024	1	103:56	1,839285714	1055	1	88:47	1,872340426	1086	1
47:26	1,807692308	1025	2	46:25	1,84	1056	2	103:55	1,872727273	1086	1
85:47	1,808510638	1026	1	127:69	1,84057971	1056	1	118:63	1,873015873	1086	1
123:68	1,808823529	1026	1	81:44	1,840909091	1057	1	15:8	1,875	1088	8
38:21	1,80952381	1027	3	116:63	1,841269841	1057	1	122:65	1,876923077	1090	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
107:57	1,877192982	1090	1	86:45	1,911111111	1121	1	109:56	1,946428571	1153	1
92:49	1,87755102	1091	1	65:34	1,911764706	1122	1	37:19	1,947368421	1154	3
77:41	1,87804878	1091	1	109:57	1,912280702	1122	1	113:58	1,948275862	1155	1
62:33	1,878787879	1092	2	44:23	1,913043478	1123	2	76:39	1,948717949	1155	1
109:58	1,879310345	1092	1	111:58	1,913793103	1124	1	115:59	1,949152542	1155	1
47:25	1,88	1093	2	67:35	1,914285714	1124	1	39:20	1,95	1156	3
126:67	1,880597015	1093	1	90:47	1,914893617	1125	1	119:61	1,950819672	1157	1
79:42	1,880952381	1094	1	113:59	1,915254237	1125	1	80:41	1,951219512	1157	1
111:59	1,881355932	1094	1	23:12	1,916666667	1126	5	121:62	1,951612903	1158	1
32:17	1,882352941	1095	4	117:61	1,918032787	1128	1	41:21	1,952380952	1158	3
113:60	1,883333333	1096	1	94:49	1,918367347	1128	1	125:64	1,953125	1159	1
81:43	1,88372093	1096	1	71:37	1,918918919	1128	1	84:43	1,953488372	1159	1
49:26	1,884615385	1097	2	119:62	1,919354839	1129	1	127:65	1,953846154	1160	1
115:61	1,885245902	1098	1	48:25	1,92	1129	2	43:22	1,954545455	1160	2
66:35	1,885714286	1098	1	121:63	1,920634921	1130	1	88:45	1,955555556	1161	1
83:44	1,886363636	1099	1	73:38	1,921052632	1130	1	45:23	1,956521739	1162	2
100:53	1,886792453	1099	1	98:51	1,921568627	1131	1	92:47	1,957446809	1163	1
117:62	1,887096774	1099	1	123:64	1,921875	1131	1	47:24	1,958333333	1164	2
17:9	1,888888889	1101	7	25:13	1,923076923	1132	5	96:49	1,959183673	1164	1
121:64	1,890625	1103	1	127:66	1,924242424	1133	1	49:25	1,96	1165	2
104:55	1,890909091	1103	1	102:53	1,924528302	1133	1	100:51	1,960784314	1166	1
87:46	1,891304348	1103	1	77:40	1,925	1134	1	51:26	1,961538462	1166	2
70:37	1,891891892	1104	1	52:27	1,925925926	1135	2	104:53	1,962264151	1167	1
123:65	1,892307692	1104	1	79:41	1,926829268	1135	1	53:27	1,962962963	1168	2
53:28	1,892857143	1105	2	106:55	1,927272727	1136	1	108:55	1,963636364	1168	1
89:47	1,893617021	1105	1	27:14	1,928571429	1137	4	55:28	1,964285714	1169	2
125:66	1,893939394	1106	1	110:57	1,929824561	1138	1	112:57	1,964912281	1169	1
36:19	1,894736842	1106	3	83:43	1,930232558	1139	1	57:29	1,965517241	1170	2
127:67	1,895522388	1107	1	56:29	1,931034483	1139	2	116:59	1,966101695	1170	1
91:48	1,895833333	1107	1	85:44	1,931818182	1140	1	59:30	1,966666667	1171	2
55:29	1,896551724	1108	2	114:59	1,93220339	1140	1	120:61	1,967213115	1171	1
74:39	1,897435897	1109	1	29:15	1,933333333	1141	4	61:31	1,967741935	1172	2
93:49	1,897959184	1109	1	118:61	1,93442623	1142	1	124:63	1,968253968	1172	1
112:59	1,898305085	1110	1	89:46	1,934782609	1143	1	63:32	1,96875	1173	2
19:10	1,9	1111	6	60:31	1,935483871	1143	2	128:65	1,969230769	1173	1
116:61	1,901639344	1113	1	91:47	1,936170213	1144	1	65:33	1,96969697	1174	1
97:51	1,901960784	1113	1	122:63	1,936507937	1144	1	67:34	1,970588235	1174	1
78:41	1,902439024	1113	1	31:16	1,9375	1145	4	69:35	1,971428571	1175	1
59:31	1,903225806	1114	2	126:65	1,938461538	1146	1	71:36	1,972222222	1176	1
99:52	1,903846154	1115	1	95:49	1,93877551	1146	1	73:37	1,972972973	1176	1
40:21	1,904761905	1116	3	64:33	1,939393939	1147	2	75:38	1,973684211	1177	1
101:53	1,905660377	1116	1	97:50	1,94	1147	1	77:39	1,974358974	1178	1
61:32	1,90625	1117	2	33:17	1,941176471	1148	3	79:40	1,975	1178	1
82:43	1,906976744	1118	1	101:52	1,942307692	1149	1	81:41	1,975609756	1179	1
103:54	1,907407407	1118	1	68:35	1,942857143	1150	1	83:42	1,976190476	1179	1
124:65	1,907692308	1118	1	103:53	1,943396226	1150	1	85:43	1,976744186	1180	1
21:11	1,909090909	1119	6	35:18	1,944444444	1151	3	87:44	1,977272727	1180	1
128:67	1,910447761	1121	1	107:55	1,945454545	1152	1	89:45	1,977777778	1181	1
107:56	1,910714286	1121	1	72:37	1,945945946	1153	1	91:46	1,97826087	1181	1

Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.	Razón	Valor	Cents	Rec.
93:47	1,978723404	1181	1	107:54	1,981481481	1184	1	121:61	1,983606557	1186	1
95:48	1,979166667	1182	1	109:55	1,981818182	1184	1	123:62	1,983870968	1186	1
97:49	1,979591837	1182	1	111:56	1,982142857	1184	1	125:63	1,984126984	1186	1
99:50	1,98	1183	1	113:57	1,98245614	1185	1	127:64	1,984375	1186	1
101:51	1,980392157	1183	1	115:58	1,982758621	1185	1	2:1	2	1200	64
103:52	1,980769231	1183	1	117:59	1,983050847	1185	1				
105:53	1,981132075	1184	1	119:60	1,983333333	1186	1				

* **Rec** = Recurrencias. Número de veces que aparece el mismo valor de intervalo al interaccionar los armónicos entre sí.

Copyright Luis de la Barrera 2013