Capítulo IV. Sistemas musicales armónicos de segunda generación

4.1.- Dispersión armónica en el sistema pitagórico.- Antes de comenzar a realizar el estudio de algún nuevo sistema musical armónico, siguiendo los mismos criterios establecidos desde un principio, quizá resulte prudente realizar una recapitulación sobre las características inherentes al sistema formado por las líneas armónicas $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ y $\mathbf{L_3}$, exactamente igual al sistema pitagórico, con el objeto de que sirva de recordatorio en el momento de abordar esos posibles sistemas sucesivos.

La criba de armónicos, realizada al suprimir todos aquellos pertenecientes a otras líneas no contempladas dentro del sistema, produce una primera serie físico-armónica particular o serie básica que, hasta el armónico *2187*, queda estructurada del modo siguiente:

Serie físico-armónica particular del sistema pitagórico

1 $_{\mathbf{2}}$ 2 $_{\mathbf{1,5}}$ 3 $_{\mathbf{1,333333}}$ 4 $_{1,5}$ 6 $_{1,333333}$ 8 $_{\mathbf{1,125}}$ 9 $_{1,333333}$ 12 $_{1,333333}$ 16 $_{1,125}$ 18 $_{1,333333}$ 24 $_{1,125}$ 27 $_{\mathbf{1,185185}}$ 32 $_{1,125}$
36 $_{1,333333}$ 48 $_{1,125}$ 54 $_{1,185185}$ 64 $_{1,125}$ 72 $_{1,125}$ 81 $_{1,185185}$ 96 $_{1,125}$ 108 $_{1,185185}$ 128 $_{1,125}$ 144 $_{1,125}$ 162 $_{1,185185}$
192 $_{1,125}$ 216 $_{1,125}$ 243 $_{\mathbf{1,053497}}$ 256 $_{1,125}$ 288 $_{1,125}$ 324 $_{1,185185}$ 384 $_{1,125}$ 432 $_{1,125}$ 486 $_{1,053497}$ 512 $_{1,125}$
576 $_{1,125}$ 648 $_{1,125}$ 729 $_{1,053497}$ 768 $_{1,125}$ 864 $_{1,125}$ 972 $_{1,053497}$ 1024 $_{1,125}$ 1152 $_{1,125}$ 1296 $_{1,125}$ 1458 $_{1,053497}$
1536 $_{1,125}$ 1728 $_{1,125}$ 1944 $_{1,053497}$ 2048 $_{\mathbf{1,067871}}$ 2187...

Se puede apreciar en ese desarrollo que la serie básica está compuesta exclusivamente por siete intervalos: **2**, **1,5**, **1,333333**, **1,125**, **1,185185**, **1,053497** y **1,067871**, de los cuales hay tres que tienen una aparición inmediata y consecutiva, precisamente los llamados "consonantes", mientras que el resto lo hace cada vez más escalonadamente. Estos siete intervalos son los clasificados como "físico-armónicos", pues aparecen espontáneamente en la serie básica cribada y por tanto son los que rigen el sistema en su conjunto. También puede comprobarse que los primeros, pilares armónicos en cualquier sistema, desaparecen de la serie de inmediato mientras los restantes se reiteran bastantes veces más durante el proceso de desarrollo.

Es necesario recordar que a partir de cada uno de los armónicos de la serie básica se forma una nueva serie físico-armónica particular que se rige por la misma interválica que la primera, por lo **que todo el proceso, en su conjunto, adquiere inequívocamente dimensiones fractales en su complejo entramado.** Como ejemplo, el inicio de la serie físico-armónica del tercer armónico sería, pues, el siguiente:

Serie físico-armónica particular del tercer armónico

3 $_{\mathbf{2}}$ 6 $_{\mathbf{1,5}}$ 9 $_{\mathbf{1,333333}}$ 12 $_{1,5}$ 18 $_{1,333333}$ 24 $_{\mathbf{1,125}}$ 27 $_{1,333333}$ 36 $_{1,333333}$ 48 $_{1,125}$ 54 $_{1,333333}$ 72 $_{1,125}$ 81 $_{\mathbf{1,185185}}$ 96...

La secuencia anterior revela claramente la igualdad del proceso en la formación de intervalos físico-armónicos de ambas series y, en consecuencia, de todas.

El último intervalo físico-armónico considerado en la integridad del sistema es el determinado por los armónicos *524288* y *531441*, cuyo valor es **1,013643**, denominado comma pitagórica y hace el número ocho de los mismos. Dicho intervalo revela la imposibilidad de poder hacer coincidir en un mismo valor una serie de quintas justas con otra de octavas, siendo el reseñado, 1,013643, la diferencia entre el armónico *524288*, obtenido mediante una sucesión de octavas justas (2^{19} = 524.288), y el *531441*, obtenido con una de quintas (3^{12} = 531.441).

Las interrelaciones de las líneas armónicas que conforman el sistema dan lugar, como puede suponerse, a un mayor número de intervalos que en el desarrollo horizontal del triángulo armónico, esto es, en la formación de las “escalas naturales” del sistema, se entremezclan con los físico-armónicos, de esas mismas líneas o de las derivadas. Les llamaremos **intervalos complementarios**, siendo su influencia armónica inferior en cualquier proceso musical a la de los físico-armónicos.

Es de destacar la imposibilidad de que una serie físico-armónica, general o particular, por su propia ley de formación, contenga armónicos consecutivos cuya distancia interválica esté comprendida entre el valor de octava y el de quinta justa. Sin embargo, dentro de las “escalas naturales” que venimos tratando, sí existen sus inversiones, mayores por tanto que el intervalo de quinta y que podemos considerar como casos particulares de los mismos. Puede hablarse, entonces, de **intervalos físico-armónicos inversos** y, por extensión a los complementarios, de **intervalos complementarios inversos**.

La totalidad de los intervalos viene así determinada por los dos procesos mencionados: la interacción de las líneas armónicas y “las escalas naturales” que éstos producen. En este caso concreto, el sistema pitagórico limitado al armónico *531441*, el número de intervalos distintos asciende a veinticuatro, siendo imposible la existencia de cualquier otro. Puede, por tanto, establecerse una nueva clasificación interválica, atendiendo a estas características.

Clasificación de los intervalos pitagóricos atendiendo a su proceso de formación					
Intervalos físico-armónicos e inversiones			**Intervalos complementarios e inversiones**		
Razón	**Valor**	**Denominación**	**Razón**	**Valor**	**Denominación**
1:1	**1**	Unísono			
531441:524288	1,013643	Comma pitagórica			
256:243	1,053497	Limma, semitono diatónico			
2187:2048	1,067871	Apotomé, semitono cromático			
			65536:59049	1,109857	
9:8	1,125	Tono mayor, 2ª mayor			
32:27	1,185185	Semiditono, 3ª menor			
			19683:16384	1,201354	
			8192:6561	1,248590	
			81:64	1,265625	Ditono, 3ª mayor
4:3	1,333333	Diatessaron, 4ª justa			
			177147:131072	1,351524	
			1024:729	1,404663	
			729:512	1,423828	
			262144:177147	1,479810	
3:2	1,5	Diapente, 5ª justa			
			128:81	1,580246	6ª menor
			6561:4096	1,601806	
			32768:19683	1,664786	
27:16	1,6875	6ª mayor			
16:9	1,777777	7ª menor			
			59049:32768	1,802032	
4096:2187	1,872885				
243:128	1,898437	7ª mayor			
2:1	2	Diapasón, 8ª justa			

Es importante observar que **el intervalo de ditono o tercera mayor pitagórica (81:64 = 1,265625) no pertenece a los físico-armónicos, sino que resulta ser un complementario derivado de la interrelación de la línea L_{81}, con el armónico *64* (2^6) de la serie básica, L_1. Este rasgo le inhabilita como intervalo armónico siendo, sin embargo, fundamental dentro de un gran número de escalas, en particular en las pentáfonas y eptáfonas.** Su valor es, también, el equivalente al de dos tonos mayores, (9/8) × (9/8) = 81/64.

Una de las escalas más utilizadas por los griegos, a la cual Platón hace referencia en su Diálogo “Timeo”, es la eptáfona siguiente,

primer tetracordo | segundo tetracordo

tono (9:8) **tono** (9:8) **limma** (256:243) **tono** (9:8) **tono** (9:8) **tono** (9:8) **limma** (256:243)

3ª mayor (81:64) | **3ª mayor** (81:64)

3ª mayor (81:64)

similar en estructura, a nuestra escala diatónica de modo mayor, aunque absolutamente distinta en sus valores interválicos y relaciones armónicas. En ella puede comprobarse la importancia del intervalo de ditono al encontrase implícito en los dos tetracordos que dan lugar a la mencionada escala y, también, sirviendo de paso entre ambos al unirse con el intervalo de tono mayor que los separa. **Esto pone de relieve la gran importancia que dicha tercera mayor poseía dentro de la música griega y en toda la posterior, hasta prácticamente el Renacimiento, e igualmente da idea de la dificultad, por tratarse de un intervalo complementario, de poder crear una polifonía más allá de la posible con líneas paralelas superpuestas de octavas, quintas y cuartas justas, primeros intervalos físico-armónicos de la serie físico-armónica particular.**

Pero hay en el sistema pitagórico otro gran inconveniente cuando se trata de crear verticalidad en la música y es el relativo a la dispersión armónica que caracteriza a tal sistema según sus leyes de formación. **En un ámbito que va desde el armónico *1* hasta el *524288* se producen exclusivamente ocho intervalos físico-armónicos y, aunque cuatro de ellos se concentran dentro del margen de los nueve primeros, siendo tres únicamente los consonantes, la totalidad de los siete que entran a formar parte del sistema de escalas no lo hacen hasta el *2187*, lo que viene a producir una gran dispersión en las afinidades armónicas de la totalidad del sistema.** Además el resto de los intervalos, los complementarios, son fruto, en su mayor parte, de la relación de líneas armónicas muy superiores con armónicos a octavas muy por encima del origen, lo que acentúa todavía más la mencionada dispersión y, en consecuencia, la inarmonía, aunque ésta sea compensada, no obstante, por la corrección sensorial que se establece entre las relaciones interválicas lejanas y las formadas por otras líneas mucho más cercanas al origen.

Efectivamente, como se ha comprobado en el capítulo anterior, las relaciones pitagóricas son sustituidas por otras más próximas, que contribuyen a una mayor unidad del sistema y a un ligero aumento de sus cualidades armónicas, muy mediatizadas, a pesar de ello, por la extrema relevancia del intervalo de ditono o tercera mayor pitagórica, omnipresente en sus escalas más importantes.

Las relaciones sustitutivas de las verdaderas o pitagóricas son, como también quedó planteado, consecuencia de la interacción de armónicos de la L_5 con otros de la L_1 o de la L_3. Esta evidencia, lleva por tanto a cuestionarse la posible existencia de un nuevo sistema musical armónico, como de segunda generación, en el que la línea L_5 pase a ser constitutiva del mismo y en igualdad de condiciones junto a las ya contempladas L_1, L_2 y L_3.

Antes de proseguir con la exposición de un nuevo sistema musical de segunda generación, es oportuno mostrar en una nueva tabla los valores de los intervalos pitagóricos como constitutivos de una sucesión de quintas consecutivas, así como sus respectivos intervalos inversos. Esta serie de quintas vendrá definida por todos los valores comprendidos en el intervalo [1,2], obtenidos mediante la división de los términos de la progresión $3^{0, 1, 2, 3,... m}$ y los de la progresión $2^{0, 1, 2, 3,... n}$, para valores de ***m*** comprendidos entre ***0*** y ***12*** y valores de ***n*** entre ***0*** y ***20***. Su expresión es:

$$1 \leq \frac{3^{0,\,1,\,2,\,3,\ldots\, m}}{2^{0,\,1,\,2,\,3,\ldots\, n}} \leq 2$$

de la que es necesario desechar los valores no comprendidos en el intervalo cerrado marcado.

Los intervalos inversos responden, en consecuencia, a la expresión:

$$1 \leq \frac{2^{0,\,1,\,2,\,3,\ldots\, n}}{3^{0,\,1,\,2,\,3,\ldots\, m}} \leq 2$$

La siguiente tabla muestra estos intervalos de acuerdo a lo manifestado:

Intervalos pitagóricos ordenados por quintas justas		
Términos	**Razón**	**Valor**
$3^{12}:2^{19}$	531441:524288	1,013643
$3^{11}:2^{17}$	177147:131072	1,351524
$3^{10}:2^{15}$	59049:32768	1,802032
$3^{9}:2^{14}$	19683:16384	1,201354
$3^{8}:2^{12}$	6561:4096	1,601806
$3^{7}:2^{11}$	2187:2048	1,067871
$3^{6}:2^{9}$	729:512	1,423828
$3^{5}:2^{7}$	243:128	1,898437
$3^{4}:2^{6}$	81:64	1,265625
$3^{3}:2^{4}$	27:16	1,6875
$3^{2}:2^{3}$	9:8	1,125
$3^{1}:2^{1}$	3:2	1,5
$3^{0}:2^{0}$	1:1	1
$2^{1}:3^{0}$	2:1	2
$2^{2}:3^{1}$	4:3	1,333333
$2^{4}:3^{2}$	16:9	1,777777
$2^{5}:3^{3}$	32:27	1,185185
$2^{7}:3^{4}$	128:81	1,580246
$2^{8}:3^{5}$	256:243	1,053497
$2^{10}:3^{6}$	1024:729	1,404663
$2^{12}:3^{7}$	4096:2187	1,872885
$2^{13}:3^{8}$	8192:6561	1,248590
$2^{15}:3^{9}$	32768:19683	1,664786
$2^{16}:3^{10}$	65536:59049	1,109857
$2^{18}:3^{11}$	262144:177147	1,479810
$2^{20}:3^{12}$	1048576:531441	1,973080

La tabla anterior, en la que se representan los intervalos pitagóricos en orden de quintas ascendentes y descendentes, tendrá próximamente una amplia aplicación en el estudio de nuevos sistemas musicales armónicos y en su esquematización, por lo que, tal como aparece, puede ser considerada como el núcleo central de otras nuevas, que se obtendrán mediante determinadas y precisas agregaciones, y que contendrán intervalos de distinto valor y naturaleza sonora.

Pero esos mismos intervalos pitagóricos, considerados como el núcleo central del crecimiento de otros sistemas, se encontrarán también organizados mediante parejas de quintas y cuartas consecutivas, o lo que es lo mismo, cada intervalo físico-armónico o complementario irá inmediatamente seguido de su correspondiente inversión. El resultado de esta organización es la tabla siguiente, que será utilizada como una ayuda para aclarar determinadas e importantes cuestiones que irán surgiendo.

Intervalos pitagóricos ordenados por parejas de $5^{\underline{as}}$ y $4^{\underline{as}}$ consecutivas			
Términos		**Razón**	**Valor**
$3^0:2^0$		1:1	1
	$2^1:3^0$	2:1	2
$3^1:2^1$		3:2	1,5
	$2^2:3^1$	4:3	1,333333
$3^2:2^3$		9:8	1,125
	$2^4:3^2$	16:9	1,777777
$3^3:2^4$		27:16	1,6875
	$2^5:3^3$	32:27	1,185185
$3^4:2^6$		81:64	1,265625
	$2^7:3^4$	128:81	1,580246
$3^5:2^7$		243:128	1,898437
	$2^8:3^5$	256:243	1,053497
$3^6:2^9$		729:512	1,423828
	$2^{10}:3^6$	1024:729	1,404663
$3^7:2^{11}$		2187:2048	1,067871
	$2^{12}:3^7$	4096:2187	1,872885
$3^8:2^{12}$		6561:4096	1,601806
	$2^{13}:3^8$	8192:6561	1,248590
$3^9:2^{14}$		19683:16384	1,201354
	$2^{15}:3^9$	32768:19683	1,664786
$3^{10}:2^{15}$		59049:32768	1,802032
	$2^{16}:3^{10}$	65536:59049	1,109857
$3^{11}:2^{17}$		177147:131072	1,351524
	$2^{18}:3^{11}$	262144:177147	1,479810
$3^{12}:2^{19}$		531441:524288	1,013643
	$2^{20}:3^{12}$	1048576:531441	1,973080

4.2.- La formación de un nuevo sistema musical armónico.- El nuevo sistema que se pretende crear, a través de las reglas impuestas por la generación de series físico-armónicas relacionadas entre sí, cuyas propiedades quedan reflejadas gráficamente en el triángulo armónico, va a estar formado, según se ha avanzado ya, por las líneas $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{L_4}$ y $\mathbf{L_5}$. La línea $\mathbf{L_4}$ quedará, en cualquier caso, implícita dentro del desarrollo de la $\mathbf{L_2}$ por tratarse de una línea par derivada de ésta. Recapitulando del sistema anterior se sabe que:

- De la interacción de las líneas $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$, o progresión $\boldsymbol{2^{0,\,1,\,2,\,3,\dots\,n}}$, se obtienen los términos *1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,...*, cuyo significado musical se corresponde con una serie de octavas sucesivas (intervalo 2:1 = 2), cuyo origen es la unidad.

- De la interacción de las líneas $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_3}$, o progresión $\boldsymbol{3^{0,\,1,\,2,\,3,\dots\,m}}$, se desprenden los términos *1, 3, 9, 27, 81, 243, 729,...*, cuyo significado musical se corresponde con una serie de quintas justas sucesivas (intervalo 3:2 = 1,5), con origen, igualmente, en la unidad.

- Las líneas $\mathbf{L_2}$ y $\mathbf{L_3}$ también interrelacionan entre sí, lo que da lugar a considerar nuevos armónicos dentro del sistema. La $\mathbf{L_2}$ está formada, como ya se vio, por los términos *2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,...*, y la $\mathbf{L_3}$ por *3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33,...* Quitando todos aquellos pertenecientes a líneas excluidas, los valores que obtendremos finalmente, para todo el sistema, obedecen a la fórmula: $\boldsymbol{T_{n,\,m} = 2^{0,\,1,\,2,\,3,\dots\,n} \cdot 3^{0,\,1,\,2,\,3,\dots\,m}}$, donde $\boldsymbol{T_{n,\,m}}$ representa a cada uno de los términos obtenidos mediante la multiplicación de cualquiera de los términos de la línea $\mathbf{L_2}$ con otro cualquiera de la $\mathbf{L_3}$.

En cuanto a la línea $\mathbf{L_5}$, cuyo desarrollo físico-armónico natural produce los armónicos *5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45,...*, resulta que:

- De la interacción de ésta con la $\mathbf{L_1}$, o progresión $5^{0, 1, 2, 3,... p}$, se obtienen los términos *1, 5, 25, 125, 625,...*, cuyo significado musical se corresponde con una serie de terceras mayores sucesivas (intervalo 5:4 = 1,25), cuyo origen es la unidad.

- Pero la $\mathbf{L_5}$ también interacciona con las líneas $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, y $\mathbf{L_4}$, de lo que resulta, dejando al margen todos los armónicos pertenecientes a líneas excluidas del sistema, una serie de valores únicos que obedecen a la fórmula $T_{n, m, p} = 2^{0, 1, 2, 3,... n} \cdot 3^{0, 1, 2, 3,... m} \cdot 5^{0, 1, 2, 3,... p}$, donde $T_{n, m, p}$ representa a cada uno de los términos obtenidos de la multiplicación de cualquiera de los términos de la línea $\mathbf{L_2}$ con otros cualquiera de la $\mathbf{L_3}$ y de la $\mathbf{L_5}$.

La expresión del sistema es, en definitiva:

$$\boldsymbol{\tau_{(1\text{-}5)} = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p}$$

La tabla siguiente muestra los valores obtenidos hasta el 1024, más que suficientes para exponer las propiedades del sistema a sintetizar, habiendo tomado ***n*** los valores de ***0*** a ***10***, ***m*** de ***0*** a ***5*** y ***p*** de ***0*** a ***4***.

Armónicos del sistema $\tau_{(1\text{-}5)} = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$ originado por las líneas L_1 a L_5

Producto	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
$3^0 \cdot 5^0$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$3^1 \cdot 5^0$	3	6	12	24	48	96	192	384	768	-	-
$3^2 \cdot 5^0$	9	18	36	72	144	288	576	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^0$	27	54	108	216	432	864	-	-	-	-	-
$3^4 \cdot 5^0$	81	162	324	648	-	-	-	-	-	-	-
$3^5 \cdot 5^0$	243	486	972	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^1$	5	10	20	40	80	160	320	640	-	-	-
$3^1 \cdot 5^1$	15	30	60	120	240	480	960	-	-	-	-
$3^2 \cdot 5^1$	45	90	180	360	720	-	-	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^1$	135	270	540	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^4 \cdot 5^1$	405	810	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^2$	25	50	100	200	400	800	-	-	-	-	-
$3^1 \cdot 5^2$	75	150	300	600	-	-	-	-	-	-	-
$3^2 \cdot 5^2$	225	450	900	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^2$	675	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^3$	125	250	500	1000	-	-	-	-	-	-	-
$3^1 \cdot 5^3$	375	750	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^4$	625	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Reordenando en sentido creciente los valores obtenidos, la relación de armónicos que entran a formar parte del sistema musical descrito, son los siguientes: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 60, 64, 72, 75, 80, 81, 90, 96, 100, 108, 120, 125, 128, 135, 144, 150, 160, 162, 180, 192, 200, 216, 225, 240, 243, 250, 256, 270, 288, 300, 320, 324, 360, 375, 384, 400, 405, 432, 450, 480, 486, 500, 512, 540, 576, 600, 625, 640, 648, 675, 720, 729, 750, 768, 800, 810, 864, 900, 960, 972, 1000 y 1024.* Todos estos armónicos son los que, en consecuencia, componen la serie básica, o $\mathbf{L_1}$, del sistema particular que se va a desarrollar, hasta el valor último considerado (1024). Puede observarse, si se compara con el mismo proceso efectuado en la síntesis del sistema pitagórico, que la cantidad de armónicos comprendidos, hasta el valor 1024, es considerablemente mayor en este caso. En concreto, mientras en el sistema pitagórico su número era de cuarenta y uno, en el actual es de ochenta y siete, más del doble, lo que revela ya unas posibilidades armónicas muy superiores al concentrarse tal cantidad de ellos tan cerca del origen. **A continuación, se muestra la serie físico-armónica particular de este nuevo sistema** hasta el armónico *256*.

Serie físico-armónica particular del sistema de segunda generación

1 $_{\mathbf{2}}$ 2 $_{\mathbf{1,5}}$ 3 $_{\mathbf{1,333333}}$ 4 $_{\mathbf{1,25}}$ 5 $_{\mathbf{1,2}}$ 6 $_{1,333333}$ 8 $_{\mathbf{1,125}}$ 9 $_{\mathbf{1,111111}}$ 10 $_{1,2}$ 12 $_{1,25}$ 15 $_{\mathbf{1,066666}}$ 16 $_{1,125}$ 18 $_{1,111111}$ 20 $_{1,2}$
24 $_{\mathbf{1,041666}}$ 25 $_{\mathbf{1,08}}$ 27 $_{1,111111}$ 30 $_{1,066666}$ 32 $_{1,125}$ 36 $_{1,111111}$ 40 $_{1,125}$ 45 $_{1,066666}$ 48 $_{1,041666}$ 50 $_{1,08}$ 54 $_{1,111111}$
60 $_{1,066666}$ 64 $_{1,125}$ 72 $_{1,041666}$ 75 $_{1,066666}$ 80 $_{\mathbf{1,0125}}$ 81 $_{1,111111}$ 90 $_{1,066666}$ 96 $_{1,041666}$ 100 $_{1,08}$ 108 $_{1,111111}$
120 $_{1,041666}$ 125 $_{\mathbf{1,024}}$ 128 $_{\mathbf{1,054687}}$ 135 $_{1,066666}$ 144 $_{1,041666}$ 150 $_{1,066666}$ 160 $_{1,0125}$ 162 $_{1,111111}$ 180 $_{1,066666}$
192 $_{1,041666}$ 200 $_{1,08}$ 216 $_{1,041666}$ 225 $_{1,066666}$ 240 $_{1,0125}$ 243 $_{\mathbf{1,028806}}$ 250 $_{1,024}$ 256...

Lo primero a destacar en dicha serie es la gran abundancia de intervalos físico-armónicos contenidos dentro de los 256 considerados; en el sistema pitagórico no había más que seis y en esta ocasión suman catorce. Además, existe una gran concentración dentro de los dieciséis primeros, pues se contabilizan siete en total. **Más interesante es la agrupación en la cabeza de la serie, donde los seis primeros dan lugar a cinco intervalos, el máximo de los posibles, y que éstos sean, precisamente, los que han recibido desde antiguo la consideración de "consonantes".**

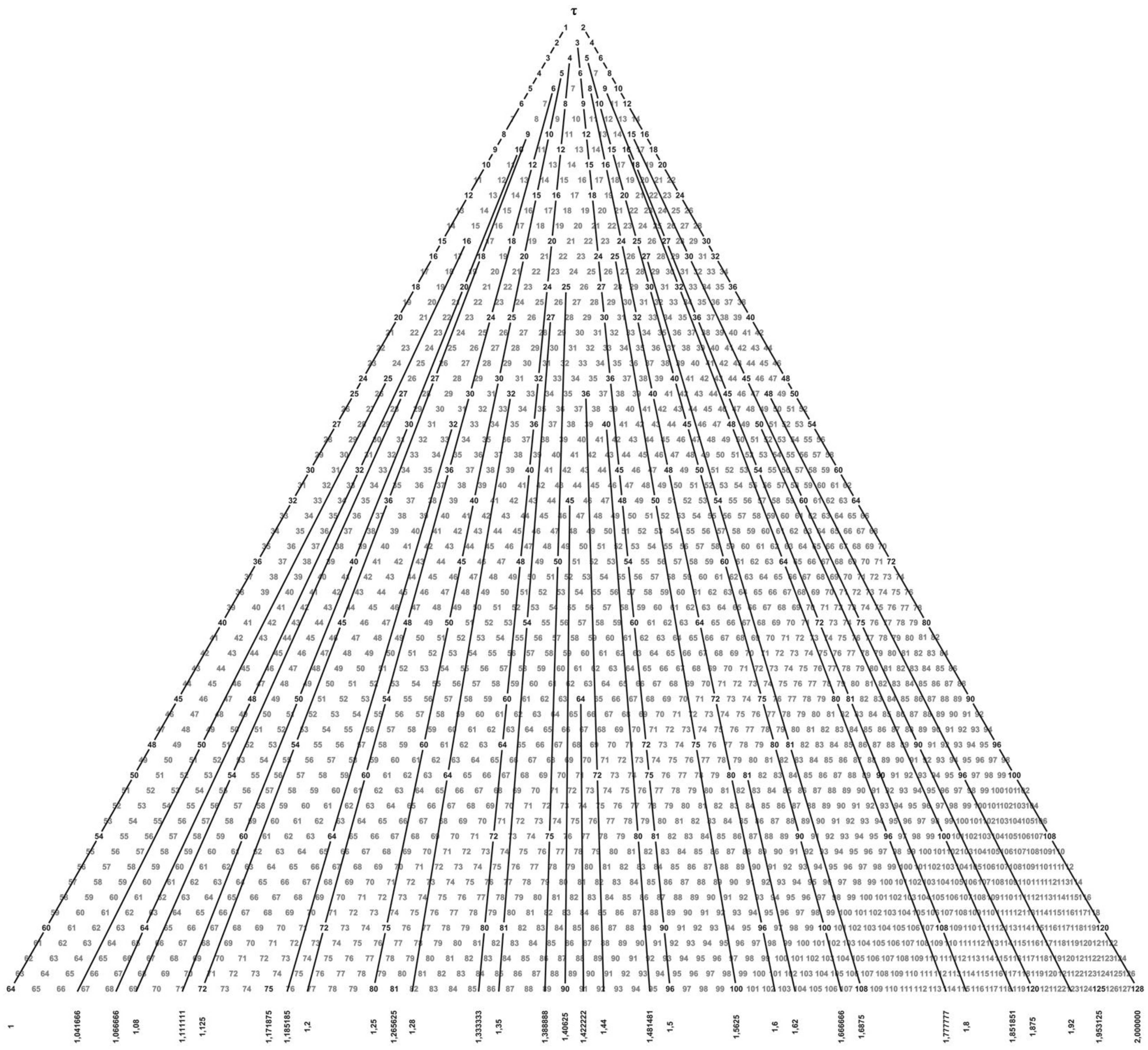
Analizando el significado musical de cada una de estas relaciones vemos que:

- Entre el primero y el segundo armónico se forma el intervalo de octava (2:1 = **2**).
- Entre el segundo y tercero el intervalo de quinta justa (3:2 = **1,5**).
- Entre el tercero y cuarto el de cuarta justa (4:3 = **1,333333**).
- Entre el cuarto y quinto, la tercera mayor (5:4 = **1,25**).
- Entre el quinto y sexto, la tercera menor (6:5 = **1,2**).
- Entre el octavo y el noveno, el tono mayor o segunda mayor pitagórica (9:8 = **1,125**).
- Entre el noveno y el décimo, el tono menor (10:9 = **1,111111**).
- Entre el armónico *15* y el *16*, el semitono mayor (16:15 = **1,066666**).
- Entre el armónico *24* y el *25*, el semitono menor (25:24 = **1,041666**).
- Entre el armónico 25 y el *27*, un intervalo algo mayor al semitono mayor (27:25 = **1,08**).
- Entre el armónico *80* y el *81*, se produce el intervalo de comma sintónica (81:80 = **1,0125**), que marca prácticamente los límites armónicos del sistema.
- El resto de los intervalos que aparecen no poseen ya peso específico en el sistema, aunque uno de ellos sí que lo tiene como sustitutivo de su afín en el sistema pitagórico, el formado entre los armónicos *135* y *128* (135:128 = **1,054687**), que sustituiría a la limma (256:243 = **1,053497**), siendo su diferencia también **1,001129**, o schisma, valor del que ya se ha tratado y sobre el que se volverá ineludiblemente después.

Como ya ocurriera anteriormente, en el capítulo precedente, con el sistema formado por las líneas $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ y $\mathbf{L_3}$ que resultó ser igual al pitagórico, derivándose de él idénticas cualidades musicales, **el sistema actual, formado por las líneas $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_5}$, se ajusta perfectamente al que históricamente le sustituyó de forma progresiva a partir del Renacimiento, denominado de los "físicos", de la "justa entonación" o, particularizando en sus precursores y defensores, de "Dídimo y Zarlino".**

En el **gráfico 7** se muestran las líneas armónicas fundamentales de este sistema particular, hasta el armónico *128*, así como todas las derivadas, consecuencia directa de las interrelaciones producidas entre el conjunto de los armónicos integrantes del mismo.

Gráfico 7.- TRIÁNGULO ARMÓNICO PARTICULAR DEL SISTEMA FORMADO POR LAS LÍNEAS L_1 A L_5



Comparado con el sistema pitagórico, resulta evidente y extraordinario la gran cantidad de líneas armónicas que se originan dentro de un margen tan limitado como es el considerado, aunque, por otra parte, esto sea una consecuencia absolutamente normal, al obtenerse numerosas líneas secundarias que se corresponden con múltiples intervalos complementarios.

Estos intervalos complementarios junto con los físico-armónicos, y sus respectivas inversiones, constituyen la totalidad dentro del sistema, hasta el límite considerado.

Clasificación de los intervalos del sistema $\tau_{(1\text{-}5)} = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$, o de la justa entonación					
Intervalos físico-armónicos e inversiones			**Intervalos complementarios e inversiones**		
Razón	**Valor**	**Denominación**	**Razón**	**Valor**	**Denominación**
1:1	1	Unísono			
81:80	1,0125	Comma sintónica			
128:125	1,024				
25:24	1,041666	Semitono menor			
135:128	1,054687				
16:15	1,066666	Semitono mayor			
27:25	1,08				
10:9	1,111111	Tono menor			
9:8	1,125	Tono mayor			
			75:64	1,171875	
			32:27	1,185185	Semiditono
6:5	1,2	Tercera menor			
5:4	1,25	Tercera mayor			
			81:64	1,265625	Ditono, 3ª mayor
			32:25	1,28	
4:3	1,333333	Subdominante. Cuarta justa			
			27:20	1,35	
			25:18	1,388888	
			45:32	1,40625	Tritono
			64:45	1,422222	
			36:25	1,44	
			40:27	1,481481	
3:2	1,5	Dominante. Quinta justa			
			25:16	1,5625	
8:5	1,6	Sexta menor			
			81:50	1,62	
5:3	1,666666	Sexta mayor			
			27:16	1,6875	6ª mayor pitagórica
16:9	1,777777	Séptima menor de tono mayor			
9:5	1,8	Séptima menor de tono menor			
50:27	1,851851				
15:8	1,875	Séptima mayor de sem. mayor			
48:25	1,92	Séptima mayor de sem. menor			
125:64	1,953125				
2:1	2	Octava justa			

Es preciso hacer notar, llegado este punto del presente estudio, que **la evolución seguida por la música occidental, en lo que se refiere a la elección de sus intervalos, puede sistematizarse a partir de una única y primordial ley natural, como es el principio físico-armónico**. Desde sus sencillas premisas, se ha realizado un singular recorrido por las líneas horizontales del triángulo armónico pitagórico que ha dejado al descubierto las leyes universales de formación de escalas en cualquier sistema particular, partiendo de las denominadas en este estudio "escalas naturales". Su absoluta correlación con las "inventadas" por el ser humano desde la más remota antigüedad ha quedado comprobada, aunque las derivaciones o desviaciones a las leyes marcadas por el principio generador, o su parcial o absoluto desconocimiento, hayan constituido una norma común en muchas civilizaciones, dando lugar a sistemas musicales ajenos o poco emparentados con aquel.

El nuevo sistema particular, o de segunda generación como se ha definido, ofrece una amplia gama de intervalos distintos con los que presumiblemente pudiera realizarse al menos uno o, posiblemente, más sistemas musicales armónicos. Hay ya una evidencia al respecto y es la que se apuntó en el capítulo anterior al comprobar que existían determinados valores sustitutivos a muchos de los intervalos pitagóricos, de tal forma que las relaciones armónicas lejanas, que los caracterizan, quedaban convertidas en otras mucho más próximas al origen. Estas sustituciones, según se vio en la tabla correspondiente, obedecían siempre a un factor común, representado por un microintervalo de corrección, cuyo valor es **1,00112915**..., o **schisma**, que, de ahora en adelante pasará a denominarse **coeficiente de transformación del sistema pitagórico al de justa entonación**, en nomenclatura abreviada **[$_3K_5$]** (léase *tres ka cinco*). La razón interválica que sustenta dicho valor es **32.805:32.768**, como luego habrá ocasión de comprobar con más detenimiento, y **es el resultado de dividir la comma pitagórica, 531.441:524.288, por la comma sintónica, 81:80.** Esto es:

$$[_3K_5] = \frac{531.441}{524.288} : \frac{81}{80} = \frac{42.515.280}{42.467.328} = \frac{32.805}{32768} = \frac{3^8 \cdot 5^1}{2^{15}} = \mathbf{1{,}001129150390625}$$

4.3.- La síntesis del sistema tonal.- Abordando ya de forma precisa el estudio de nuevos sistemas musicales armónicos que satisfagan las razones interválicas derivadas de la interacción de las líneas **L_1** a **L_5**, y antes de explorar más posibilidades, es interesante detenerse en la evolución seguida por la propia música occidental, que, a partir de un determinado y muy prolongado periodo histórico, acogió una nueva formulación interválica que rectificaba, de manera notable y definitiva, el sistema pitagórico. Esta realidad, y las enormes probabilidades de que el cambio aconteciera, se ha comentado con anterioridad, haciendo notar que en la práctica musical ya se estaba llevando a efecto dicha rectificación, eso sí, sin pretenderlo y de forma absolutamente inconsciente.

Por lo referido antes, de la gran cantidad de intervalos que se han generado por medio de la interrelación de las líneas **L_1** a **L_5**, **se escogerán únicamente aquellos que hayan resultado ser sustitutivos de los pitagóricos y también los que son comunes a ambos sistemas** y que, por tanto, no tienen que someterse al coeficiente de transformación. Los armónicos que subsisten, restringidos a unos valores muy concretos a causa de la condición impuesta, son los que figuran en la tabla siguiente:

Armónicos del sistema $\tau_{(1\text{-}5)} = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$ restringido									
Producto	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
$3^0 \cdot 5^0$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$3^1 \cdot 5^0$	3	6	12	24	48	96	192	-	-
$3^2 \cdot 5^0$	9	18	36	72	144	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^0$	27	54	108	216	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^1$	5	10	20	40	80	160	-	-	-
$3^1 \cdot 5^1$	15	30	60	120	240	-	-	-	-
$3^2 \cdot 5^1$	45	90	180	-	-	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^1$	135	-	-	-	-	-	-	-	-

Ordenándolos sucesivamente resulta la serie: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 54, 60, 64, 72, 80, 90, 96, 108, 120, 128, 135, 144, 160, 180, 192, 216, 240 y 256.* Todos ellos están contenidos, pues, dentro de la sucesión siguiente:

$$T_{n,\,m,\,p} = 2^{0,\,1,\,2,\,3,\ldots\,8} \cdot 3^{0,\,1,\,2,\,3} \cdot 5^{0,\,1} \leq 256$$

tomando ***n*** los valores de ***0*** a ***8***, ***m*** de ***0*** a ***3*** y ***p*** de ***0*** a ***1***, llegando hasta el armónico *256*, límite más que suficiente propuesto para el estudio. A continuación se muestra la serie-físico armónica particular de este sistema de segunda generación que, al prescindir, de determinados armónicos, fruto de las interrelaciones de las líneas $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_5}$, puede ser considerado también como restringido.

Serie físico-armónica particular del sistema de segunda generación restringido

$1\ _{\mathbf{2}}\ 2\ _{\mathbf{1,5}}\ 3\ _{\mathbf{1,333333}}\ 4\ _{\mathbf{1,25}}\ 5\ _{\mathbf{1,2}}\ 6\ _{1,333333}\ 8\ _{\mathbf{1,125}}\ 9\ _{\mathbf{1,111111}}\ 10\ _{1,2}\ 12\ _{1,25}\ 15\ _{\mathbf{1,066666}}\ 16\ _{1,125}\ 18\ _{1,111111}\ 20\ _{1,2}$
$24\ _{1,125}\ 27\ _{1,111111}\ 30\ _{1,066666}\ 32\ _{1,125}\ 36\ _{1,111111}\ 40\ _{1,125}\ 45\ _{1,066666}\ 48\ _{1,125}\ 54\ _{1,111111}\ 60\ _{1,066666}\ 64\ _{1,125}$
$72\ _{1,111111}\ 80\ _{1,125}\ 90\ _{1,066666}\ 96\ _{1,125}\ 108\ _{1,111111}\ 120\ _{1,066666}\ 128\ _{\mathbf{1,054687}}\ 135\ _{1,066666}\ 144\ _{1,111111}\ 160\ _{1,125}$
$180\ _{1,066666}\ 192\ _{1,125}\ 216\ _{1,111111}\ 240\ _{1,066666}\ 256$

Al estudiar la serie se observa su gran estabilidad y homogeneidad, pues a partir del armónico *16* ya se han generado casi la totalidad de los intervalos posibles, a excepción del alejado 1,054687, formado entre el armónico *128* y el *135*. Este valor, fuera de contexto y en contra de una posible normalización del conjunto, hace pensar, más que en un posible fallo o excepción, en la irrelevancia del mismo y que simplemente es fruto de no haber acotado algo más el sistema, prescindiendo del término de la sucesión $\boldsymbol{3^3 \cdot 5^1 = 135}$. Conviene recordar que la propuesta de contar con el armónico *135* se debe a que el intervalo que forma con su inmediato anterior, el *128*, de valor **1,054687**, es el sustitutivo de la limma, o **1,053497**, no existiendo razón alguna por la cual deba seguir persistiendo en el nuevo sistema. La siguiente tabla, ajustada a esta nueva concepción, omite este armónico, así como todos los superiores al mismo:

Armónicos del sistema $\boldsymbol{\tau_{(1\text{-}5)} = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p}$ acotado al *128*								
Producto	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
$3^0 \cdot 5^0$	1	2	4	8	16	32	64	128
$3^1 \cdot 5^0$	3	6	12	24	48	96	-	-
$3^2 \cdot 5^0$	9	18	36	72	-	-	-	-
$3^3 \cdot 5^0$	27	54	108	-	-	-	-	-
$3^0 \cdot 5^1$	5	10	20	40	80	-	-	-
$3^1 \cdot 5^1$	15	30	60	120	-	-	-	-
$3^2 \cdot 5^1$	45	90	-	-	-	-	-	-

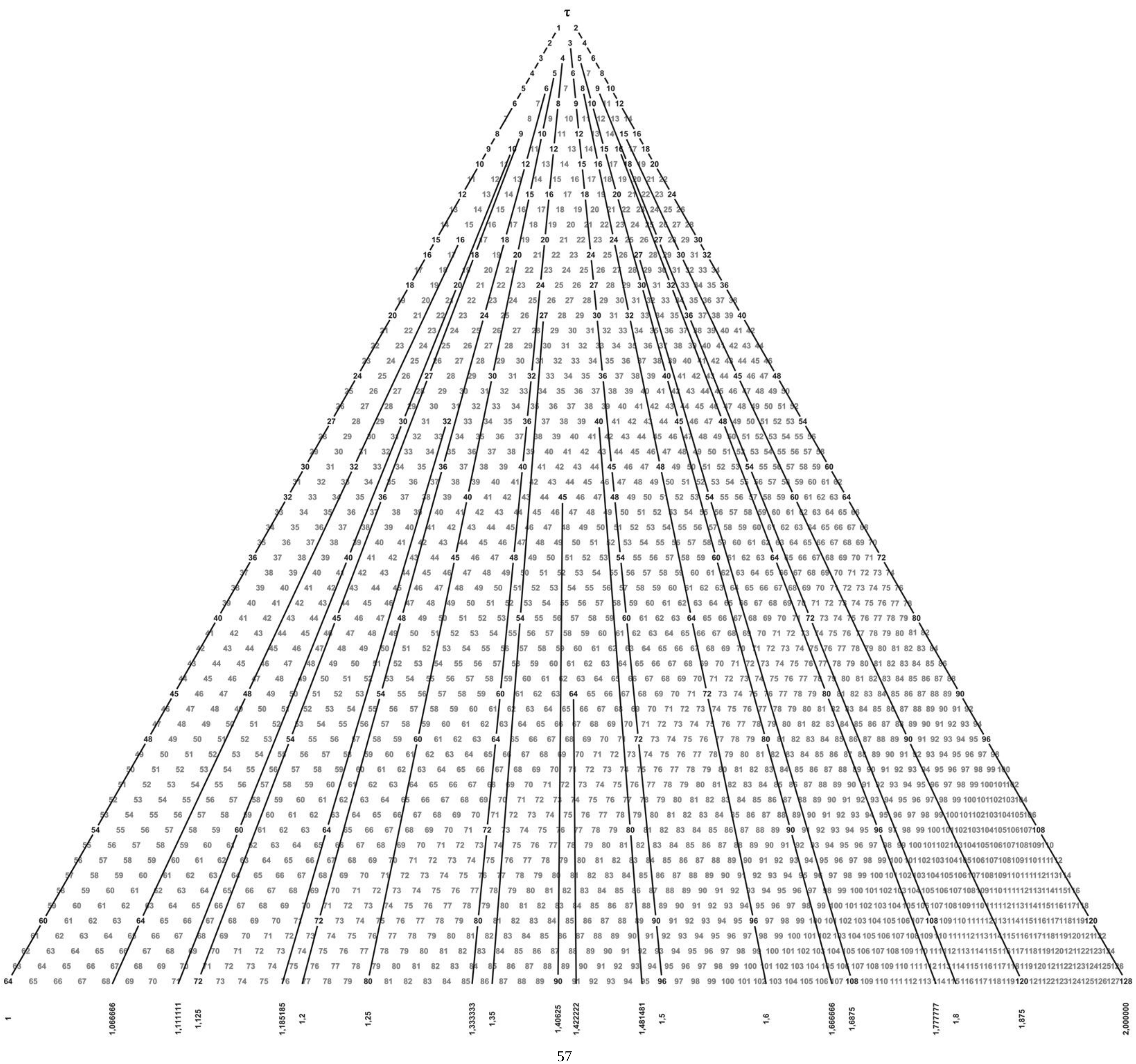
Por tanto, los intervalos físico-armónicos posibles y únicos del sistema serán los que van generándose, distintos, hasta alcanzar el armónico *16*, puesto que, a partir de ahí, ya se produce únicamente una continua reiteración de los tres últimos:

$$1\ _{\mathbf{2}}\ 2\ _{\mathbf{1,5}}\ 3\ _{\mathbf{1,333333}}\ 4\ _{\mathbf{1,25}}\ 5\ _{\mathbf{1,2}}\ 6\ _{1,333333}\ 8\ _{\mathbf{1,125}}\ 9\ _{\mathbf{1,111111}}\ 10\ _{1,2}\ 12\ _{1,25}\ 15\ _{\mathbf{1,066666}}\ 16$$

Al iniciar este trabajo sobre la formación de sistemas musicales, basados exclusivamente en el fenómeno físico-armónico, mediante la interacción de determinadas líneas armónicas, se hacía patente la imposibilidad de justificar, exclusivamente a través de dicho fenómeno, las características inherentes al sistema pitagórico, dada la utilización de líneas armónicas excesivamente alejadas de la básica y, en consecuencia, fuera de toda percepción humana. Sin embargo, la existencia de intervalos muy próximos, con líneas armónicas distintas, emparentados a través del coeficiente de transformación $[{}_3K_5] = 1{,}001129...$, acercó extraordinariamente, hasta límites perceptivos posibles, la casi totalidad de las relaciones interválicas pitagóricas, corroborando con ello la viabilidad del estudio teórico presentado. El sistema particular y restringido, al que ahora se presta atención, consecuencia del pitagórico, fundamenta toda su interválica en los primeros doce armónicos de su serie físico-armónica (del *1* al *16*, hurtándose a la práctica musical los armónicos *7*, *11*, *13* y *14* de la serie físico-armónica integral) y en un conjunto de líneas armónicas principales muy escueto, como son la $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{L_5}$, $\mathbf{L_9}$, $\mathbf{L_{15}}$, $\mathbf{L_{27}}$ y $\mathbf{L_{45}}$. Esta nueva aproximación al principio generador, con el consiguiente aumento de relaciones armónicas más poderosas y cohesionadas, viene a respaldar aún más lo acertado de la teoría expuesta al moverse ya sus límites armónicos dentro de los márgenes aceptados para la percepción auditiva humana real y, lo que sin duda es más determinante, la percepción subliminal.

Para mantener el mismo método expositivo seguido al tratar las características del sistema pitagórico, puede ser conveniente realizar ese mismo recorrido por las sucesivas “escalas naturales” que, a modo de estratos, aparecen representadas en el **gráfico 8**, en el que se muestra el triángulo particular del sistema ahora comentado.

Gráfico 8.- TRIÁNGULO ARMÓNICO DEL SISTEMA TONAL



De la observación y desglose de estas “escalas naturales”, salta a la vista, en primer lugar, la ausencia de regularidad en su formación, al contrario de lo que ocurría en el sistema pitagórico; la inclusión de una nueva línea armónica, como es la $\mathbf{L_5}$, desfigura e impide esa cadencia y permite, sin embargo, un mayor acercamiento al origen de todas ellas, al formarse a partir de armónicos más próximos a la unidad, así como un proceso formativo más rápido (que ocasiona el solapamiento de unas con otras) y una mayor multiplicidad en el valor interválico de sus grados. Hasta el armónico *128*, estas son las escalas que se producen:

- **Escala de octava:** Consta de un único sonido y es exactamente igual que la pitagórica, por lo que sirve para ella todo lo que se dijo ya con anterioridad. El intervalo de octava, que se forma entre el primer sonido y el sucesivo (2:1 = **2**) es, sin duda, el patrón de medida natural y el unificador del proceso sensorial auditivo.

Escala de 8ª

1	octava	2

- **Escala de quinta y cuarta:** Como tal, solo aparece una de forma independiente y es exactamente igual a la primera de las pitagóricas. Está formada por dos intervalos, uno de quinta justa (3:2 = **1,5**) y otro de cuarta justa (4:3 = **1,333333**) y es válido, también, todo lo dicho al tratar el sistema pitagórico.

Escala de 5ª y 4ª

2	quinta	3	cuarta	4

- **Escalas trífonas**: Aparecen dos de forma independiente y están constituidas por un intervalo de cuarta justa (4:3 = **1,333333**), uno de tercera mayor (5:4 = **1,25**) y uno de tercera menor (6:5 = **1,2**). La irrupción del quinto armónico rompe ya cualquier tipo de semejanza con el desarrollo del sistema pitagórico. Contempladas estas dos escalas bajo un punto de vista armónico, se ve claramente que la primera, en su conjunto, constituye un acorde perfecto de modo mayor en segunda inversión, y la segunda ese mismo acorde en estado fundamental.

Escalas trífonas

3	cuarta	4	3ª mayor	5	3ª menor	6
4	3ª mayor	5	3ª menor	6	cuarta	8

- **Escalas tetráfonas:** También se forman dos, de manera independiente. Sus intervalos son la tercera menor (6:5 = **1,2**), la cuarta justa (4:3 = **1,333333**), el tono mayor (9:8 = **1,125**) y el tono menor (10:9 = **1,111111**). Este tipo de escala se puede considerar, al igual que las pitagóricas del mismo nombre, como defectivas de las pentáfonas. Es de destacar que en ellas aparecen, por primera vez, tanto el tono mayor como el tono menor, como resultado de la división de una tercera mayor física en dos intervalos denominados de tono, pero distintos, y cuya diferencia es de una comma sintónica (9:8 /10:9 = 81:80 = **1,0125**).

Escalas tetráfonas

5	3ª menor	6	cuarta	8	tono mayor	9	tono menor	10
6	cuarta	8	tono mayor	9	tono menor	10	3ª menor	12

- **Escalas pentáfonas:** Aparecen cuatro independientes, antes de que un nuevo armónico rompa la regularidad de la serie. Están formadas por cinco intervalos, todos diferentes: tono mayor (9:8 = **1,125**), tono menor (10:9 = **1,111111**), tercera menor (6:5 = **1,2**), tercera mayor (5:4 = **1,25**) y semitono (16:15 = **1,066666**).

Escalas pentáfonas

8	tono mayor	9	tono menor	10	3ª menor	12	3ª mayor	15	semitono	16
9	tono menor	10	3ª menor	12	3ª mayor	15	semitono	16	tono mayor	18
10	3ª menor	12	3ª mayor	15	semitono	16	tono mayor	18	tono menor	20
12	3ª mayor	15	semitono	16	tono mayor	18	tono menor	20	3ª menor	24

Como puede observarse, no mantienen ningún nexo común con las pentáfonas pitagóricas ya que su formación obedece a interacciones muy distintas entre los armónicos de la serie básica. Este tipo de escalas, al igual que el siguiente, correspondiente a las exáfonas, no posee una independencia práctica, tal era el caso de las escalas pentáfonas pitagóricas, de tan gran importancia en la música de muchos pueblos y civilizaciones. Está claro que, una vez consolidado el sistema pitagórico y habiendo avanzado a través de él hasta la síntesis de las escalas eptáfonas y a todos los modos que éstas sustentaban, la única razón de invalidar sus relaciones interválicas estribó en la necesidad de encontrar escalas de igual número de notas pero con una estructuración más acorde con los nuevos tratamientos polifónicos que la sociedad demandaba o los compositores y teóricos de la música intuían como más correctos o verdaderos. Por eso, aunque son una consecuencia directa del desarrollo de este sistema musical armónico particular y restringido, su existencia, tan real como el de las eptáfonas, no ha sido intuida o prevista dentro de las teorías de formación de sistemas, pudiendo ser consideradas, a lo sumo, como escalas defectivas o incompletas.

- **Escalas exáfonas:** Tienen lugar a partir del armónico *15* y aparecen independientes cuatro. Están formadas por un semitono (16:15 = **1,066666**), dos tonos menores (10:9 = **1,111111**), dos tonos mayores (9:8 = **1,125**) y una tercera menor (6:5 = **1,2**)**.** Como las pitagóricas no tienen ninguna relación con la escala exáfona de tonos enteros, ni tampoco con las propias pitagóricas, que, aunque coincidentes en la distribución interválica de sus grados, sus relaciones internas y los armónicos que las sustentan, a unas y a otras, son esencialmente diferentes, siempre hablando en términos teóricos y haciendo caso omiso de la existencia del coeficiente de transformación **[$_3$K$_5$]**.

Escalas exáfonas

15	semitono	16	tono mayor	18	tono menor	20	3ª menor	24	tono mayor	27	tono menor	30
16	tono mayor	18	tono menor	20	3ª menor	24	tono mayor	27	tono menor	30	semitono	32
18	tono menor	20	3ª menor	24	tono mayor	27	tono menor	30	semitono	32	tono mayor	36
20	3ª menor	24	tono mayor	27	tono menor	30	semitono	32	tono mayor	36	tono menor	40

- **Escalas eptáfonas:** En el presente sistema armónico particular y restringido, que se está tratando, las escalas eptáfonas son las últimas posibles y hacen su aparición a partir del armónico *24* desarrollándose hasta el *90*, sin repeticiones, y hasta el *128* con las cuatro repeticiones que suceden a las siete básicas anteriores. La estabilidad y regularidad del sistema, ausente hasta el momento, se hace patente y se consolida de forma permanente, alcanzando al resto de los armónicos. Están constituidas por tres tonos mayores (9:8 = **1,125**), dos tonos menores (10:9 = **1,111111**) y dos semitonos mayores (16:15 = **1,066666**).

Escalas eptáfonas

24	tono mayor	27	tono menor	30	semitono	32	tono mayor	36	tono menor	40	tono mayor	45	semitono	48
27	tono menor	30	semitono	32	tono mayor	36	tono menor	40	tono mayor	45	semitono	48	tono mayor	54
30	semitono	32	tono mayor	36	tono menor	40	tono mayor	45	semitono	48	tono mayor	54	tono menor	60
32	tono mayor	36	tono menor	40	tono mayor	45	semitono	48	tono mayor	54	tono menor	60	semitono	64
36	tono menor	40	tono mayor	45	semitono	48	tono mayor	54	tono menor	60	semitono	64	tono mayor	72
40	tono mayor	45	semitono	48	tono mayor	54	tono menor	60	semitono	64	tono mayor	72	tono menor	80
45	semitono	48	tono mayor	54	tono menor	60	semitono	64	tono mayor	72	tono menor	80	tono mayor	90

Repeticiones

48	tono mayor	54	tono menor	60	semitono	64	tono mayor	72	tono menor	80	tono mayor	90	semitono	96
54	tono menor	60	semitono	64	tono mayor	72	tono menor	80	tono mayor	90	semitono	96	tono mayor	108
60	semitono	64	tono mayor	72	tono menor	80	tono mayor	90	semitono	96	tono mayor	108	tono menor	120
64	tono mayor	72	tono menor	80	tono mayor	90	semitono	96	tono mayor	108	tono menor	120	semitono	128

La primera en aparecer es de sobra conocida. **Se trata sencillamente de la escala natural de modo mayor o escala mayor física** y tiene su razón de ser a partir del armónico *24*, por lo que su línea armónica directa es la $\mathbf{L_3}$ ($3 \times 2^3 = 24$, que es el octavo armónico de dicha línea). Esta observación es importante ya que viene a demostrar que **la escala diatónica natural de modo mayor no tiene como fundamental el origen o unidad, como podría suponerse a priori, intentando dar a esta escala un lugar preeminente o distinguido del que, en realidad, carece.** Por el contrario, queda de nuevo demostrada la imposibilidad de crear dicha escala escogiendo el origen o unidad como fundamental o punto de partida, ya que la cuarta justa (**4:3 = 1,333333**) no puede nunca ser obtenida mediante una relación interválica entre los armónicos considerados. La propia escala eptáfona que se forma sobre el armónico *32* (cuyo origen directo sí es la unidad) confirma esta circunstancia, careciendo de dicho intervalo y produciéndose, en su lugar, esto es, sobre su cuarto grado, el intervalo de cuarta aumentada o tritono (**45:32 = 1,40625**). No es entonces desacertada, según describen diversos teóricos, la idea de situar la fundamental de una escala de modo mayor entre dos quintas justas que actuarían sobre ella en direcciones opuestas.

Si se parte del armónico *24*, primero sobre el que tiene lugar la aparición de una escala natural de modo mayor, se observa fácilmente que la relación de quinta justa ascendente se forma con el armónico *36*, y la de quinta justa descendente (inversión del intervalo de cuarta justa, formado con el armónico *32*), con el armónico *16*. Esto es:

5ª justa ascendente 36

Fundamental **24**

5ª justa descendente 16

Reduciendo al máximo, por sucesivas divisiones a la mitad, los valores de los armónicos relacionados, se obtienen sus correspondientes orígenes, que son, de menor a mayor, 1, 3 y 9 o, dicho de otro modo, las líneas armónicas $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_3}$ y $\mathbf{L_9}$. Luego, **la fundamental auténtica o absoluta de una escala de modo mayor no es realmente su primer grado o tónica sino la quinta justa descendente que se forma a partir de ella, y que tiene como origen la unidad, ocupando dentro de esa escala su cuarto grado y desempeñando la función armónica de subdominante.** Esto es tan cierto que hasta el mismo oído lo acusa de modo fehaciente si se interpretan todos los grados, excepto el séptimo, de una escala mayor justa en el orden o combinaciones melódicas que se quieran, o aleatoriamente. Siempre ese cuarto grado (armónico *32*, línea armónica $\mathbf{L_1}$), se erigirá como fundamental oculta o reposo sonoro total de la secuencia interpretada. La entrada del séptimo grado (armónico *45*), en esa improvisada secuencia melódica, debilitará de forma muy efectiva esta atracción de la línea $\mathbf{L_1}$, por cuanto dicho armónico resuelve de forma directa sobre la $\mathbf{L_3}$ (es su decimoquinto armónico) o la $\mathbf{L_5}$ (se trata de su noveno armónico), y, por añadidura, también resuelve sobre las líneas dependientes $\mathbf{L_9}$ y $\mathbf{L_{15}}$. El equilibrio de tendencias queda así asegurado y la fundamental auténtica convenientemente "disimulada" a la percepción auditiva, pero no, por supuesto, sus importantes influencias armónicas sobre los diversos grados de la escala. La siguiente tabla muestra la distancia interválica de cada grado de una escala natural de modo mayor en comparación con el primero, así como sus relaciones y clases de intervalo.

Interválica de la Escala natural de modo mayor					
Grado	**Relación**	**Valor**	**Razón**	**Intervalo**	**Clase**
I	24:24	1	1:1	Unísono	Físico-armónico
II	27:24	1,125	9:8	2ª mayor	Físico-armónico
III	30:24	1,25	5:4	3ª mayor	Físico-armónico
IV	32:24	1,333333	4:3	4ª justa	Físico-armónico
V	36:24	1,5	3:2	5ª justa	Físico-armónico
VI	40:24	1,666666	5:3	6ª mayor	Inversión Fís-arm.
VII	45:24	1,875	15:8	7ª mayor	Inversión Fís-arm.
VIII	48:24	2	2.1	8ª justa	Físico-armónico

El éxito musical de la escala diatónica de modo mayor es de una evidencia incuestionable en la historia de la música occidental desde el comienzo de su utilización, en el siglo XVI, hasta nuestros días (tras su necesaria corrección, en el XVIII, mediante el temperamento) y ello se debe, sin duda, a sus especiales características melódicas y armónicas potenciales, derivadas de los grados que la forman y de las afinidades entre ambos. Puede observarse que todos los intervalos que tienen lugar entre su tónica (armónico *24*), y el resto de los grados resultan ser físico-armónicos y pertenecientes, como cabe esperar, a la serie físico-armónica particular del sistema de segunda generación, bien en estado directo o en inversión y, también, que los intervalos que forman entre sí sus grados conjuntos, son, igualmente físico-armónicos. Esta especial circunstancia trae aparejada la afinidad melódica de todos los grados con su tónica y entre sí mismos, pero, también, la posibilidad de realizar la superposición de notas, desde este primer grado, o desde otros, facilitando un extraordinario tratamiento o despliegue armónico, imposible en el sistema pitagórico.

Determinada la secuencia de armónicos que dan lugar a la escala mayor y situados en el momento histórico en que los modos eclesiásticos, derivados de los griegos, eran transformados en su interválica interna y reducido su uso a dos de ellos, principalmente, cabe preguntarse sobre la escala que representa al otro, o sea, **al modo menor**, siguiendo con la lectura de las líneas horizontales del triángulo armónico particular y restringido que se está analizando.

Tal escala debe de encontrarse a una tercera menor por debajo de la escala natural de modo mayor, o una sexta mayor por encima. Luego, 24×1,666666 = 40. **La escala natural de modo menor se forma, pues, a partir del armónico 40**, siendo su interválica la siguiente:

Interválica de la Escala natural de modo menor					
Grado	**Relación**	**Valor**	**Razón**	**Intervalo**	**Clase**
I	40:40	1	1:1	Unísono	Físico-armónico
II	45:40	1,125	9:8	2ª mayor	Físico-armónico
III	48:40	1,2	6:5	3ª menor	Físico-armónico
IV	54:40	1,35	27:20	4ª + comma	Complementario
V	60:40	1,5	3:2	5ª justa	Físico-armónico
VI	64:40	1,6	8:5	6ª menor	Inversión Fís-arm.
VII	72:40	1,8	9:5	7ª menor	Inversión Fís-arm.
VIII	80:40	2	2.1	8ª justa	Físico-armónico

Sin duda, es ahora cuando se puede determinar, sin equívocos, qué línea armónica directa sustenta a una escala de modo menor. Como su tónica se forma sobre el armónico *40,* por continuas reducciones a la mitad se comprueba que su origen es la $\mathbf{L_5}$, ($5\times2^3 = 40$), lo que revela su absoluta independencia de la línea armónica que mantiene al modo mayor, que es la $\mathbf{L_3}$**.** Esto viene a demostrar que **el modo mayor y el modo menor son absolutamente independientes entre sí y, por tanto, es falsa la idea de considerar al modo menor como un derivado del mayor o consecuencia directa de la existencia de aquél.** No hay tampoco, pues, un modo privilegiado, ni los acordes de uno son más naturales que los del otro. La serie físico-armónica particular del sistema, en su desarrollo horizontal integral, determina la presencia y propiedades de ambos. Si algo tienen realmente en común es la dependencia directa de sus respectivas líneas armónicas, $\mathbf{L_3}$ para el modo mayor y $\mathbf{L_5}$ para el menor, a la línea armónica general del sistema, $\mathbf{L_1}$, sobre la que convergen, irremisiblemente, todas. Se puede hablar, quizá, de "cierta ventaja" del modo mayor sobre el menor en tanto que la $\mathbf{L_3}$ está más cercana al origen que la $\mathbf{L_5}$, como también el armónico sobre el que se forma, el *24*. Además en el modo menor, formado sobre el armónico *40*, se da cierta "circunstancia adversa" al contener un intervalo complementario como cuarto grado (4ª justa + comma sintónica), de valor 1,35 y no una cuarta justa.

La dependencia a líneas distintas y la distancia de cada una de ellas al origen tiene que ver también con las cualidades sensoriales que a cada modo se le ha adjudicado a lo largo de la historia. Un carácter más enérgico, fuerte, rotundo, alegre, "masculino", como atributos del modo mayor, y suave, débil, impreciso, triste, "femenino", como cualidades correspondientes al modo menor. Esta clasificación, con adjetivos, más o menos acertados y algunos totalmente fuera de lugar, es cierta en la medida en que el modo mayor acusa con mayor ímpetu su cercanía al origen y, debido a esa circunstancia, las tensiones y atracciones que se producen sobre sus grados son de mayor magnitud. Por el contrario, el modo menor, al depender de la $\mathbf{L_5}$, se mantiene más al margen de los fuertes vínculos antes mencionados y las relaciones de quintas justas consecutivas, tan poderosas.

Aclarada esta interesante cuestión, hay otra que también resulta importante revisar. Tiene que ver, precisamente, con la reducción de los modos antiguos a los dos actuales, mayor y menor. Si las líneas armónicas que los mantienen son las comentadas, ¿qué líneas armónicas respaldan a las demás escalas eptáfonas?

Efectuando las reducciones pertinentes sobre cada uno de los armónicos que las sustentan, se llega enseguida a su determinación:

Líneas armónicas de las escalas eptáfonas			
Armónicos	**Reducción**	**Línea**	**Línea real**
24 = $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$	$3^1 \cdot 5^0$	**3**	**3**
27 = $2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0$	$3^3 \cdot 5^0$	**27**	**3**
30 = $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	$3^1 \cdot 5^1$	**15**	**3 y 5**
32 = $2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^0$	$3^0 \cdot 5^0$	**1**	**1**
36 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$	$3^2 \cdot 5^0$	**9**	**3**
40 = $2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1$	$3^0 \cdot 5^1$	**5**	**5**
45 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$	$3^2 \cdot 5^1$	**45**	**3 y 5**

Como se puede observar en la tabla anterior, cada escala eptáfona tiene aparejada una línea armónica directa para su fundamental. Sin embargo, **algunas de estas líneas no son más que líneas dependientes de otras principales, al ser sus valores de cabeza múltiplos de números primos.** Tal es el caso de las escalas sobre los armónicos *27*, *30*, *36* y *45*. En el caso de las que se forman sobre el *27* y el *36* su línea armónica real es la $\mathbf{L_3}$, y de las que se forman sobre el *30* y el *45* pueden ser tanto la $\mathbf{L_3}$ como la $\mathbf{L_5}$, puesto que el armónico *30* resulta ser el décimo de la $\mathbf{L_3}$ y el sexto de la $\mathbf{L_5}$, y el *45* hace el número quince de la $\mathbf{L_3}$ y el noveno de la $\mathbf{L_5}$. Por tanto, **existe una prevalencia de las que se forman sobre los armónicos *24* y *40*, ya que sus líneas armónicas son de las clasificadas como independientes, al originarse su formación a partir de un número primo.** Queda únicamente por conocer qué ocurre con la escala formada sobre el armónico *32*, pues, además, su línea directa es la $\mathbf{L_1}$. Sin duda, esto tendría que hacerla prevalecer sobre las otras dos, pero, por contra, su estructura conlleva un "gran problema" ya que carece de cuarta justa y posee un "desagradable" intervalo de tres tonos (dos mayores y uno menor), o cuarta aumentada en su lugar, como ya se comentó. Este intervalo, "tan poco natural", neutro e indefinido la invalida y anula, tanto desde un punto de vista melódico como armónico.

La imposibilidad, ya manifestada en varias ocasiones, de que la línea básica primaria o $\mathbf{L_1}$ pueda dar lugar a escalas útiles, en cualquiera de los sistemas musicales armónicos considerados, pone de nuevo en evidencia su esencial y exclusiva naturaleza. A partir de ella se producen todas las líneas armónicas que sustentan un sistema, lo que la otorga un primordial efecto motriz, generador y desencadenante de toda una serie de relaciones armónicas entre los diversos sonidos concomitantes que entran a formar parte de un episodio acústico-musical; durante ese proceso es la receptora y reguladora de todas las tensiones armónicas que acontecen, tanto en el fluir horizontal como en el vertical, configurándose, al término, desde su privilegiada, inadvertida y oculta situación, como línea de convergencia y reposo absoluto de todos los sonidos.

En la siguiente tabla aparecen las siete escalas eptáfonas, con sus grados correspondientes sombreados, precedidas del armónico sobre el que cada una de ellas tiene su formación y entre un doble subrayado las de modo mayor y menor. Las siguientes casillas muestran el nombre del intervalo que forma cada grado con el primero, así como su razón, valor y clasificación.

	Escalas eptáfonas										
	Armónico							**Intervalo**	**Razón**	**Valor**	**Clase**
	24	**27**	**30**	**32**	**36**	**40**	**45**				
Grados y escalas	I	I	I	I	I	I	I	Unísono	1:1	1	Fís. Arm.
			II				II	Semitono	16:15	1,066666	Fís. Arm.
		II			II			Tono menor	10:9	1,111111	Fís. Arm.
	II			II		II		Tono mayor	9:8	1,125	Fís. Arm.
		III						3ª menor pitagór.	32:27	1,185185	Comp.
			III			III	III	3ª menor	6:5	1,2	Fís. Arm.
	III			III	III			3ª mayor	5:4	1,25	Fís. Arm.
	IV	IV	IV		IV		IV	4ª justa	4:3	1,333333	Fís. Arm.
						IV		4ª justa+comma	27:20	1,35	Comp.
				IV				4ª aumentada	45:32	1,40625	Comp.
							V	Inversión 4ª aum.	64:45	1,422222	Inv. Com.
		V						5ª justa-comma	40:27	1,481481	Inv. Com.
	V		V	V	V	V		5ª justa	3:2	1,5	Fís. Arm.
			VI			VI	VI	6ª menor	8:5	1,6	I. F. Arm.
	VI	VI			VI			6ª mayor	5:3	1,666666	I. F. Arm.
				VI				6ª mayor pitagór.	27:16	1,6875	Inv. Com.
		VII			VII		VII	7ª de tono mayor	16:9	1,777777	I. F. Arm.
			VII			VII		7ª de tono menor	9:5	1,8	I. F. Arm.
	VII			VII				7ª mayor	15:8	1,875	I. F. Arm.
	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	Octava	2:1	2	Fís. Arm.

Puede verse que el número de intervalos distintos suman veinte, cifra considerablemente mayor que los posibles entre los grados consecutivos de una única escala, que son siete. Pero esos mismos veinte intervalos son también todos y los únicos que pueden formarse realizando la integridad de las combinaciones posibles entre esos mismos grados. Como cabe deducir de esta observación, la pureza física o natural de estas escalas produce una importante proliferación de las relaciones interválicas y, en consecuencia, un gran inconveniente para la práctica musical.

Al igual que ocurría en el sistema pitagórico, cada una de las escalas, de todas las comprendidas en la totalidad del desarrollo de este sistema particular y restringido, es únicamente posible a partir de un concreto y exclusivo armónico del conjunto que configura su triángulo armónico, aunque luego, dicha escala, pueda seguir estructurándose sobre todos los armónicos que formen octavas con ese básico. Así, la escala del denominado modo mayor, que tiene lugar sobre el armónico *24*, no puede ser realizada sobre ninguno de los demás, que dan lugar a las escalas eptáfonas, sin que aparezcan valores diferentes a los admitidos por el sistema, como puede comprobarse a continuación:

Escalas de modo mayor a partir de cada uno de los grados de la primera

24		27		30		32		36		40		45		48
27	tono mayor (9:8)	**30,375**	tono menor (10:9)	**33,75**	semitono (16:15)	36	tono mayor (9:8)	**40,5**	tono menor (10:9)	45	tono mayor (9:8)	**50.625**	semitono (16:15)	54
30		**33,75**		**37,5**		40		45		**50**		**56,25**		60
32		36		40		**42,666**		48		**53,333**		60		64
36		**40,5**		45		48		54		60		**67,5**		72
40		45		**50**		**53,333**		60		**66,666**		**75**		80
45		**50,625**		**56,25**		60		**67,5**		**75**		**84,375**		90

Todos los valores que aparecen en negrita son armónicos imposibles de obtener partiendo de una serie físico-armónica que tenga a la unidad como punto de origen, lo que hace necesario el cambio a otra distinta o, expresándose en términos musicales, proceder a modular cuando se quiera abordar este tipo de escala desde un armónico, de la serie físico-armónica básica, diferente al que le sirve de base para su formación. Pero, aún así, como es conocido, no pueden resolverse todos los problemas prácticos que conlleva el mantenimiento de la pureza del sistema. La existencia de dos diferentes clases de intervalo de tono, mayor (9:8 = 1,125) y menor (10:9 = 1,111111), así como que no todas las quintas que aparecen sean justas (sobre el armónico *27* tiene lugar la quinta 40:27 = 1,481481, inferior en una comma sintónica a la quinta justa), y otra serie de pormenores de similar naturaleza, dificulta sobremanera la práctica musical en una buena parte de los instrumentos y tampoco ayuda a una interpretación fluida y segura, en muchos otros.

No es objeto del presente trabajo analizar y ni siquiera exponer la multitud de soluciones "intermedias" distintas que han sido dadas, a través de los siglos, por músicos, filósofos y teóricos, a las "insuficiencias" prácticas de la justa entonación, pues la finalidad de este estudio es otra y radica principalmente en verificar y llevar hasta sus últimas consecuencias la idea principal que subyace desde el principio, esto es, **establecer una teoría general sobre los sistemas musicales en la que queden unificados todos aquéllos que basan su formación en relaciones interválicas sujetas a las propiedades emanadas de la aplicación de una ley universal, básica y primaria, ─quizá esencial en el origen y transformación de todas las cosas─, como es el principio físico-armónico y sus líneas armónicas derivadas.**

Formar escalas, más allá de las eptáfonas, no resulta factible en el sistema particular y restringido a unos armónicos concretos que se viene exponiendo. Sin embargo, de la simple observación, en su triángulo armónico, de las líneas armónicas que lo sustentan, puede sacarse fácilmente la conclusión de que dicho sistema depara posibilidades combinatorias que traspasan los límites establecidos por las escalas descritas. Este es un asunto que se estudiará después, en capítulo aparte. Para finalizar el presente, en el que se ha tratado de los sistemas musicales de segunda generación, construidos mediante la adición de la línea $\mathbf{L_5}$ a las ya contempladas, es oportuno retornar sobre los valores interválicos relacionados, de los sistemas pitagórico y de justa entonación, a través del coeficiente de transformación [$_3K_5$], para comprobar como dichos valores quedan integrados dentro de un mismo concepto matemático.

Para ello se va a recuperar la tabla de la página 47, en el que los intervalos pitagóricos quedaban ordenados por quintas justas (3:2) que, partiendo de la unidad (1:1) y de su octava (2:1), eran susceptibles de extenderse hasta el infinito, aunque, para el presente estudio, baste con las doce quintas ascendentes y sus doce descendentes correspondientes. Dicha tabla, de la que se dijo que serviría como núcleo central para la elaboración de otras ampliadas y que contendrían valores interválicos correspondientes a nuevos sistemas, es la que aparece a continuación formando la parte central de una nueva, más extensa, en la que numerosos valores interválicos, derivados de las interrelaciones de la línea armónica $\mathbf{L_5}$ con las que sustentan el sistema pitagórico, $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_3}$, están a un lado y a otro de aquélla, manteniendo una distancia interválica cuyo valor constante es el del coeficiente de transformación [$_3K_5$] = 1,001129...

Esta disposición revela una ordenación de gran trascendencia, pues, la misma, **da lugar a la observación directa de la formación de infinitas progresiones geométricas acotadas (leídas por líneas, de izquierda a derecha), que tienen por razón constante el coeficiente de transformación mencionado.** Este coeficiente se pone de manifiesto, de forma explícita, en la misma tabla, como segundo término de la progresión geométrica creciente que, empezando en la unidad (fila y columna centrales de la tabla), se desarrolla hasta alcanzar un valor muy próximo a 2, límite o cota impuesta por la ordenación interválica de los armónicos dentro del triángulo armónico universal. Su valor, ya expuesto con anterioridad, aparece como uno más dentro de los infinitos valores interválicos correspondientes a cada uno de los términos de las infinitas progresiones geométricas posibles.

$$\boldsymbol{[{}_3K_5] = \frac{3^8 \cdot 5^1}{2^{15}} = \frac{32.805}{32.768} = 1{,}001129150390625}$$

Términos centrales de las progresiones geométricas crecientes acotadas surgidas al relacionar, mediante su máxima aproximación, las interválicas del sistema pitagórico y de la justa entonación. Coeficiente [$_3K_5$].								
Sucesión de intervalos justa entonación (I)			**Sucesión de intervalos pitagóricos**			**Sucesión de intervalos justa entonación (II)**		
$3^4:2^4\cdot5^1$	81:80	1,0125	$3^{12}\cdot5^0:2^{19}$	531441:524288	1,013643	$3^{20}\cdot5^1:2^{34}$	17433922005:17179869184	1,014787
$3^3:2^2\cdot5^1$	**27:20**	**1,35**	$3^{11}\cdot5^0:2^{17}$	177147:131072	1,351524	$3^{19}\cdot5^1:2^{32}$	5811307335:4294967296	1,353050
$2^0\cdot3^2:5^1$	**9:5**	**1,8**	$3^{10}\cdot5^0:2^{15}$	59049:32768	1,802032	$3^{18}\cdot5^1:2^{30}$	1937102445:1073741824	1,804067
$2^1\cdot3^1:5^1$	**6:5**	**1,2**	$3^9\cdot5^0:2^{14}$	19683:16384	1,201354	$3^{17}\cdot5^1:2^{29}$	645700815:536870912	1,202711
$2^3:3^0\cdot5^1$	**8:5**	**1,6**	$3^8\cdot5^0:2^{12}$	6561:4096	1,601806	$3^{16}\cdot5^1:2^{27}$	215233605:134217728	1,603615
$2^4:3^1\cdot5^1$	**16:15**	**1,066666**	$3^7\cdot5^0:2^{11}$	2187:2048	1,067871	$3^{15}\cdot5^1:2^{26}$	71744535:67108864	1,069076
$2^6:3^2\cdot5^1$	**64:45**	**1,422222**	$3^6\cdot5^0:2^9$	729:512	1,423828	$3^{14}\cdot5^1:2^{24}$	23914845:16777216	1,425435
$2^8:3^3\cdot5^1$	256:135	1,896296	$3^5\cdot5^0:2^7$	243:128	1,898437	$3^{13}\cdot5^1:2^{22}$	7971615:4194304	1,900581
$2^9:3^4\cdot5^1$	512:405	1,264197	$3^4\cdot5^0:2^6$	81:64	1,265625	$3^{12}\cdot5^1:2^{21}$	2657205:2097152	1,267054
$2^{11}:3^5\cdot5^1$	2048:1215	1,685596	**$3^3\cdot5^0:2^4$**	**27:16**	**1,6875**	$3^{11}\cdot5^1:2^{19}$	885735:524288	1,689405
$2^{12}:3^6\cdot5^1$	4096:3645	1,123731	**$3^2\cdot5^0:2^3$**	**9:8**	**1,125**	$3^{10}\cdot5^1:2^{18}$	295245:262144	1,126270
$2^{14}:3^7\cdot5^1$	16384:10935	1,498308	**$3^1\cdot5^0:2^1$**	**3:2**	**1,5**	$3^9\cdot5^1:2^{16}$	98415:65536	1,501693
			$3^0\cdot5^0:2^0$	**1:1**	**1**	**$3^8\cdot5^1:2^{15}$**	**32805:32768**	**1,001129**
$2^{16}:3^8\cdot5^1$	65536:32805	1,997744	**$2^1:3^0\cdot5^0$**	**2:1**	**2**			
$2^{17}:3^9\cdot5^1$	131072:98415	1,331829	**$2^2:3^1\cdot5^0$**	**4:3**	**1,333333**	$3^7\cdot5^1:2^{13}$	10935:8192	1,334838
$2^{19}:3^{10}\cdot5^1$	524288:295245	1,775772	**$2^4:3^2\cdot5^0$**	**16:9**	**1,777777**	$3^6\cdot5^1:2^{11}$	3645:2048	1,779785
$2^{20}:3^{11}\cdot5^1$	1048576:885735	1,183848	**$2^5:3^3\cdot5^0$**	**32:27**	**1,185185**	$3^5\cdot5^1:2^{10}$	1215:1024	1,186523
$2^{22}:3^{12}\cdot5^1$	4194304:2657205	1,578464	$2^7:3^4\cdot5^0$	128:81	1,580246	$3^4\cdot5^1:2^8$	405:256	1,582031
$2^{23}:3^{13}\cdot5^1$	8388608:7971615	1,052309	$2^8:3^5\cdot5^0$	256:243	1,053497	$3^3\cdot5^1:2^7$	135:128	1,054687
$2^{25}:3^{14}\cdot5^1$	33554432:23914845	1,403079	$2^{10}:3^6\cdot5^0$	1024:729	1,404663	**$3^2\cdot5^1:2^5$**	**45:32**	**1,40625**
$2^{27}:3^{15}\cdot5^1$	134217728:71744535	1,870772	$2^{12}:3^7\cdot5^0$	4096:2187	1,872885	**$3^1\cdot5^1:2^3$**	**15:8**	**1,875**
$2^{28}:3^{16}\cdot5^1$	268435456:215233605	1,247181	$2^{13}:3^8\cdot5^0$	8192:6561	1,248590	**$3^0\cdot5^1:2^2$**	**5:4**	**1,25**
$2^{30}:3^{17}\cdot5^1$	1073741824:645700815	1,662909	$2^{15}:3^9\cdot5^0$	32768:19683	1,664786	**$2^0\cdot5^1:3^1$**	**5:3**	**1,666666**
$2^{31}:3^{18}\cdot5^1$	2147483648:1937102445	1,108606	$2^{16}:3^{10}\cdot5^0$	65536:59049	1,109857	**$2^1\cdot5^1:3^2$**	**10:9**	**1,111111**
$2^{33}:3^{19}\cdot5^1$	8589934592:5811307335	1,478141	$2^{18}:3^{11}\cdot5^0$	262144:177147	1,479810	**$2^3\cdot5^1:3^3$**	**40:27**	**1,481481**
$2^{35}:3^{20}\cdot5^1$	34359738368:17433922005	1,970855	$2^{20}:3^{12}\cdot5^0$	1048576:531441	1,973080	$2^5\cdot5^1:3^4$	160:81	1,975308
Progresiones geométricas crecientes acotadas. Valor de la razón = $3^8 \cdot 5^1 : 2^{15}$ = *1,001129150390625*								

El coeficiente de transformación divide a la octava en 614,21 partes, como puede comprobarse:

$$1{,}001129150390625^{\,x} = 2$$

$$x \log 1{,}001129150390625 = \log 2$$

$$x = \log 2 / \log 1{,}001129150390625$$

$$\boldsymbol{x = 614{,}2126389...}$$

si tomamos $x = 614$, el valor de esta progresión geométrica más cercano a la octava será:

$$1{,}001129150390625^{614} = \mathbf{1{,}999520}$$

de lo que se deduce una desviación mínima con el valor de octava, inferior a un cent, cuyo valor es de 1,000577.

$$2/1{,}999520 = \mathbf{1{,}00024} < 1{,}000577.$$

Por otra parte, como el valor del coeficiente de transformación elevado a 614,2126389 es igual a la octava, se deduce que su valor en cents. es de 1,95372.

$$[_3K_5] = \mathbf{1{,}95372\ cents.}$$

La tabla anterior refleja también (sombreados en gris) la situación de los diferentes intervalos que configuran el sistema tonal. Puede verse como estos forman tres grupos perfectamente regulares y ordenados por quintas sucesivas. De los veinte que contiene el sistema, ocho de ellos son propios y exclusivos del sistema pitagórico, y los doce restantes son el resultado de contar con la línea armónica $\mathbf{L_5}$ para la formación de sistemas.

Todo esto viene a corroborar las profundas raíces matemáticas y físicas que sustentan el sistema tonal, en contra de la opinión generalizada que lo considera como artificioso, convencional y resultado, en último extremo, del azar o la arbitrariedad en la historia de la música**. Los intervalos que participan en su formación, ordenados en diversas sucesiones de quintas, pertenecen además, cada uno de ellos, a progresiones geométricas distintas, pero que guardan idéntica particularidad, como es que su valor es el resultado de resolver la razón formada entre números primos elevados a las menores potencias, en cada una de sus respectivas sucesiones. También, los intervalos denominados consonantes aparecen justo alrededor de esos puntos de inflexión (en las tres sucesiones de quintas centrales) caracterizados por la misma circunstancia anterior.**

De nuevo, la constatación de que ni el azar ni la arbitrariedad han conducido a la música occidental a un encuentro singular con las leyes de la naturaleza, nos obliga a continuar investigando en esa misma línea abierta y a dar el paso siguiente en idéntica dirección, teniendo como punto de mira el sistema musical que se desarrolló a partir del de los físicos o de justa entonación. Este sistema, “artificial”, ya no puede constituir una sorpresa, pues no es sino el denominado temperado de doce notas por octava, cuyo estudio se aborda de forma inmediata.