

Capítulo II. Determinación de la serie armónica básica. El triángulo armónico.

2.1.- La serie armónica básica.- La escala de armónicos natural que se origina cuando se hace vibrar un objeto ideal viene expresada, como ya se ha visto, por la serie $f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f... nf$, en la que f representa una frecuencia de un valor cualquiera.

Si hacemos abstracción de este valor, o hacemos que f sea igual a 1 (sin que ello quiera significar que f toma el valor de una vibración por segundo o hertzio), la serie queda convertida inmediatamente en la de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... ∞ . Esta serie, donde la unidad se dispone como primer término y principio generador de todos los demás, es la que, a partir de ahora, se utilizará como serie armónica básica de todo el sistema de relaciones numéricas que se irán deduciendo a partir de ella, relaciones que, trasladadas al mundo de la física del sonido, darán lugar a los diferentes intervalos sonoros susceptibles de constituirse en "sistemas musicales armónicos".

2.2.- Formación del triángulo armónico.- Analizando someramente la serie de los números naturales se hace evidente una posible ordenación de la misma de forma fragmentada, de tal modo que cada sección comience con un término que, al final y siguiendo la ley de formación de los números naturales, se encuentre duplicado. Tal es el caso del primer fragmento posible: 1, 2. El 1 se constituye como primer término de la sección y el 2 como el último por ser el doble del 1.

El siguiente fragmento estaría constituido por los números 2, 3 y 4. El siguiente por los números 3, 4, 5 y 6. Y, así, sucesivamente hasta donde se quiera. Los ocho primeros términos quedarían, en consecuencia, representados por el esquema siguiente:

1 2
2 3 4
3 4 5 6
4 5 6 7 8

Desde un punto de vista acústico-musical, puede observarse que se ha realizado una ordenación de la serie natural básica por octavas, partiendo cada una de ellas de cada uno de los términos consecutivos de la serie y terminando en su duplicación. **Estaríamos así ante la presencia de varios sonidos, con una fundamental común, la unidad, ordenados, siguiendo las líneas horizontales, por "escalas naturales" que contienen únicamente términos pertenecientes a la mencionada serie básica y que no pueden contener otros, de acuerdo a su principio generador.**

Por otra parte, puede observarse también que la serie básica (1, 2, 3, 4...) sigue estando presente formando el lado izquierdo del esquema en forma de triángulo.

1 2
2 3 4
3 4 5 6
4 5 6 7 8

El lado derecho representa la primera serie derivada de la serie básica, constituida por los sonidos primarios a la octava (2, 4, 6, 8... $2n$).

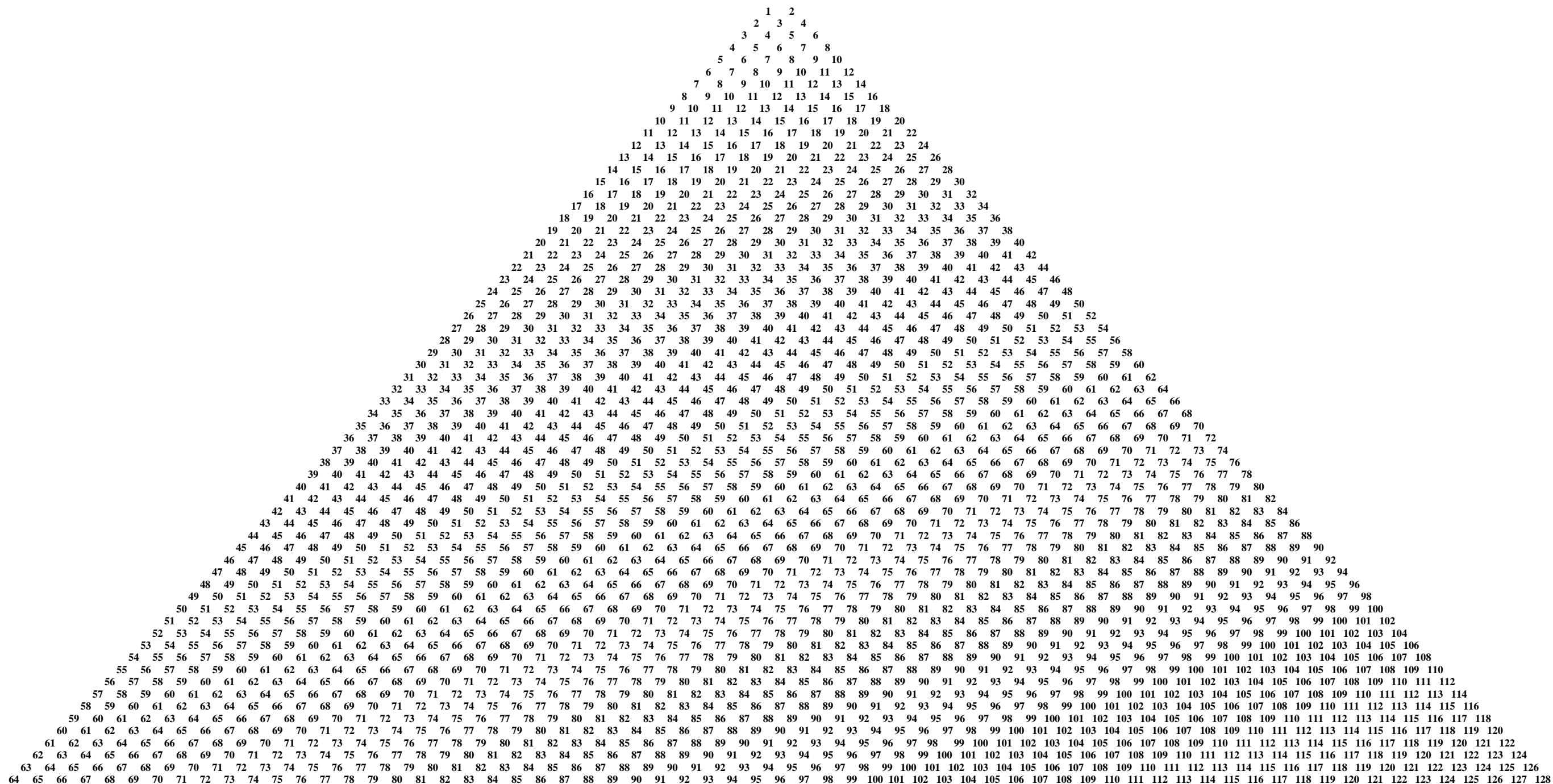
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|
| | 1 | 2 | | | |
| | 2 | 3 | 4 | | |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |

Existen, pues, en esta representación gráfica de la serie básica dos direcciones bien diferenciadas: la horizontal que representa a todas las "escalas naturales" posibles (sonidos consecutivos) y la vertical, o más bien transversal, expandiéndose a izquierda y derecha conforme se desciende, que representa a las series armónicas (sonidos simultáneos), como es el caso, ya comprobado, de la serie básica y de su derivada primera, formada por sonidos primarios a la octava.

Desde ahora, denominaremos a esta representación gráfica **triángulo armónico de los números naturales** o **triángulo armónico universal**, y **triángulo armónico particular**, y se le representará por la letra griega τ (**tau**), acrónimo de **triángulo armónico universal**, según se vayan estudiando sus propiedades referidas a sistemas musicales armónicos concretos. Esta forma de disponer la serie básica se irá revelando de una gran trascendencia, al avanzar en el análisis, pues de su simple observación se podrán deducir y demostrar gran cantidad de fenómenos ligados a la creación de estos sistemas que, hasta el momento, no han sido suficientemente estudiados en su esencia y, mucho menos, bien comprendidos.

El triángulo armónico universal, formado como se ha visto con la serie de los números naturales puede hacerse tan extenso como se quiera, teóricamente hasta el infinito. Para los primeros cálculos he considerado como límite suficiente el número 128, armónico 128 o, en términos musicales, sonido correspondiente a la séptima octava del elemento generador, la unidad. Este "triángulo armónico universal de siete octavas", representado en el **gráfico 1**, mantiene, en todo momento, el procedimiento generativo ya explicado con anterioridad, derivándose del mismo muchos otros que mostrarán cuestiones particulares.

Gráfico 1.- TRIÁNGULO ARMÓNICO DE SIETE OCTAVAS



2.3.- El entramado armónico.- Ya hemos visto como la serie de los números naturales se convierte en la serie armónica básica que da lugar a tantas "escalas naturales" y de tantos "grados", de intervalos desiguales y decrecientes, como se quiera.

Avanzando un poco más en la construcción de los sistemas musicales armónicos, de cada uno de los términos de la serie básica (serie de los números naturales) vamos a generar su serie armónica natural. Quiere esto decir que, desde el primer armónico, la unidad, hasta el 128, que hemos tomado como límite, las series derivadas que se forman son las que siguen a continuación, en las que sus armónicos correspondientes se han ordenado por octavas y hasta el valor mencionado (128):

Serie armónica del 1

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 5 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | |
| 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |
| 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | |
| 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | |
| 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | |
| 128 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Serie armónica del 2

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 10 | 12 | 14 | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | | | | | | | | | |
| 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | |
| 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | |
| 96 | 98 | 100 | 102 | 104 | 106 | 108 | 110 | 112 | 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | |
| 128 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Serie armónica del 3

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 15 | 18 | 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | | | | | | | | | |
| 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 | 72 | 75 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | 93 | |
| 96 | 99 | 102 | 105 | 108 | 111 | 114 | 117 | 120 | 123 | 126 | | | | | | |

Serie armónica del 4

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 20 | 24 | 28 | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | | | | | | | | | |
| 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 | 96 | 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | 120 | 124 | |
| 128 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Serie armónica del 5

| | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 5 | | | | | | | | | | |
| 10 | 15 | | | | | | | | | |
| 20 | 25 | 30 | 35 | | | | | | | |
| 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | | | |
| 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | |

Serie armónica del 6

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|
| 6 | | | | | | | | | | |
| 12 | 18 | | | | | | | | | |
| 24 | 30 | 36 | 42 | | | | | | | |
| 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | | | |
| 96 | 102 | 108 | 114 | 120 | 126 | | | | | |

Serie armónica del 7

| | | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|----|----|----|----|-----|--|--|--|
| 7 | | | | | | | | | | |
| 14 | 21 | | | | | | | | | |
| 28 | 35 | 42 | 49 | | | | | | | |
| 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | 105 | | | |
| 112 | 119 | 126 | | | | | | | | |

Serie armónica del 8

| | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|--|--|--|
| 8 | | | | | | | | | | |
| 16 | 24 | | | | | | | | | |
| 32 | 40 | 48 | 56 | | | | | | | |
| 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | 112 | 120 | | | |
| 128 | | | | | | | | | | |

Serie armónica del 9

| | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|-----|-----|-----|--|--|--|--|
| 9 | | | | | | | | | | |
| 18 | 27 | | | | | | | | | |
| 36 | 45 | 54 | 63 | | | | | | | |
| 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 126 | | | | |

Serie armónica del 10

| | | | | | |
|-----------|----|-----|-----|-----|--|
| 10 | | | | | |
| 20 | 30 | | | | |
| 40 | 50 | 60 | 70 | | |
| 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | |

Serie armónica del 11

| | | | | | |
|-----------|----|-----|-----|--|--|
| 11 | | | | | |
| 22 | 33 | | | | |
| 44 | 55 | 66 | 77 | | |
| 88 | 99 | 110 | 121 | | |

Serie armónica del 12

| | | | | | |
|-----------|-----|-----|----|--|--|
| 12 | | | | | |
| 24 | 36 | | | | |
| 48 | 60 | 72 | 84 | | |
| 96 | 108 | 120 | | | |

Serie armónica del 13

| | | | | | |
|------------|-----|----|----|--|--|
| 13 | | | | | |
| 26 | 39 | | | | |
| 52 | 65 | 78 | 91 | | |
| 104 | 117 | | | | |

Serie armónica del 14

| | | | | | |
|------------|-----|----|----|--|--|
| 14 | | | | | |
| 28 | 42 | | | | |
| 56 | 70 | 84 | 98 | | |
| 112 | 126 | | | | |

Serie armónica del 15

| | | | | | |
|------------|----|----|-----|--|--|
| 15 | | | | | |
| 30 | 45 | | | | |
| 60 | 75 | 90 | 105 | | |
| 120 | | | | | |

Serie armónica del 16

| | | | | | |
|------------|----|----|-----|--|--|
| 16 | | | | | |
| 32 | 48 | | | | |
| 64 | 80 | 96 | 112 | | |
| 128 | | | | | |

Serie armónica del 17

| | | | | | |
|-----------|----|-----|-----|--|--|
| 17 | | | | | |
| 34 | 51 | | | | |
| 68 | 85 | 102 | 119 | | |

Serie armónica del 18

| | | | | | |
|-----------|----|-----|-----|--|--|
| 18 | | | | | |
| 36 | 54 | | | | |
| 72 | 90 | 108 | 126 | | |

Serie armónicas del 19, 20, 21 y 22

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 19 | | | | | | | | | | |
| 38 | 57 | | | | | | | | | |
| 76 | 95 | 114 | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | |
| 40 | 60 | | | | | | | | | |
| 80 | 100 | 120 | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | |
| 42 | 63 | | | | | | | | | |
| 84 | 105 | 126 | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | |
| 44 | 66 | | | | | | | | | |
| 88 | 110 | | | | | | | | | |

Series armónicas del 23, 24, 25, 26 y 27

| | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|----|-----------|
| <u>23</u> | | <u>24</u> | | <u>25</u> | | <u>26</u> | | <u>27</u> |
| 46 | 69 | 48 | 72 | 50 | 75 | 52 | 78 | 54 |
| 92 | 115 | 96 | 120 | 100 | 125 | 104 | | 108 |

Series armónicas del 28, 29, 30, 31 y 32

| | | | | | | | | |
|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
| <u>28</u> | | <u>29</u> | | <u>30</u> | | <u>31</u> | | <u>32</u> |
| 56 | 84 | 58 | 87 | 60 | 90 | 62 | 93 | 64 |
| 112 | | 116 | | 120 | | 124 | | 128 |

Series armónicas del 33, 34, 35, 36 y 37

| | | | | | | | | |
|-----------|----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| <u>33</u> | | <u>34</u> | | <u>35</u> | | <u>36</u> | | <u>37</u> |
| 66 | 99 | 68 | 102 | 70 | 105 | 72 | 108 | 74 |
| | | | | | | | | 111 |

Series armónicas del 38, 39, 40, 41 y 42

| | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| <u>38</u> | | <u>39</u> | | <u>40</u> | | <u>41</u> | | <u>42</u> |
| 76 | 114 | 78 | 117 | 80 | 120 | 82 | 123 | 84 |
| | | | | | | | | 126 |

Series armónicas del 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49 y 50

| | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <u>43</u> | <u>44</u> | <u>45</u> | <u>46</u> | <u>47</u> | <u>48</u> | <u>49</u> | <u>50</u> |
| 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |

Series armónicas del 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 y 58

| | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <u>51</u> | <u>52</u> | <u>53</u> | <u>54</u> | <u>55</u> | <u>56</u> | <u>57</u> | <u>58</u> |
| 102 | 104 | 106 | 108 | 110 | 112 | 114 | 116 |

Series armónicas del 59, 60, 61, 62, 63 y 64

| | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <u>59</u> | <u>60</u> | <u>61</u> | <u>62</u> | <u>63</u> | <u>64</u> |
| 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 |

El resto de los armónicos, del 65 al 128, no producen ningún tipo de despliegue al estar comprendidos sus valores de octava por encima del límite considerado, por lo que pasarán a formar parte del entramado armónico descrito con su única y exclusiva presencia.

De lo que se trata ahora es de relacionar entre sí todas estas series armónicas derivadas de la serie básica. Para ello, comenzaremos por situar la serie generadora, o serie básica, en la misma disposición marcada por la formación del triángulo armónico de los números naturales y dividida por octavas. Tendremos, en consecuencia, el esquema siguiente:

1 2
2 3 4

4 5 6 7 8

8 9 10 11 12 13 14 15 16
etc.

Esta disposición mantiene las leyes de formación del triángulo armónico aplicadas exclusivamente a dicha serie básica.

La serie correspondiente al segundo armónico, obtenida por el mismo procedimiento, queda representada en la forma:

2 4

4 6 8

8 10 12 14 16
etc.

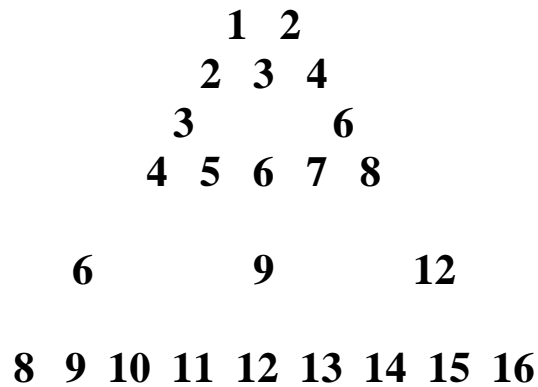
Si superponemos la serie armónica básica con la del segundo armónico obtenemos nuevamente el esquema correspondiente a la primera, lo que resulta lógico al ser la serie del segundo armónico la versión a la octava de todos los armónicos de la primera.

Siguiendo con esta ley de formación le toca el turno al armónico tercero. Su representación es la siguiente:

3 6

6 9 12
etc.

Si intercalamos esta nueva serie en el esquema general obtendremos este otro:

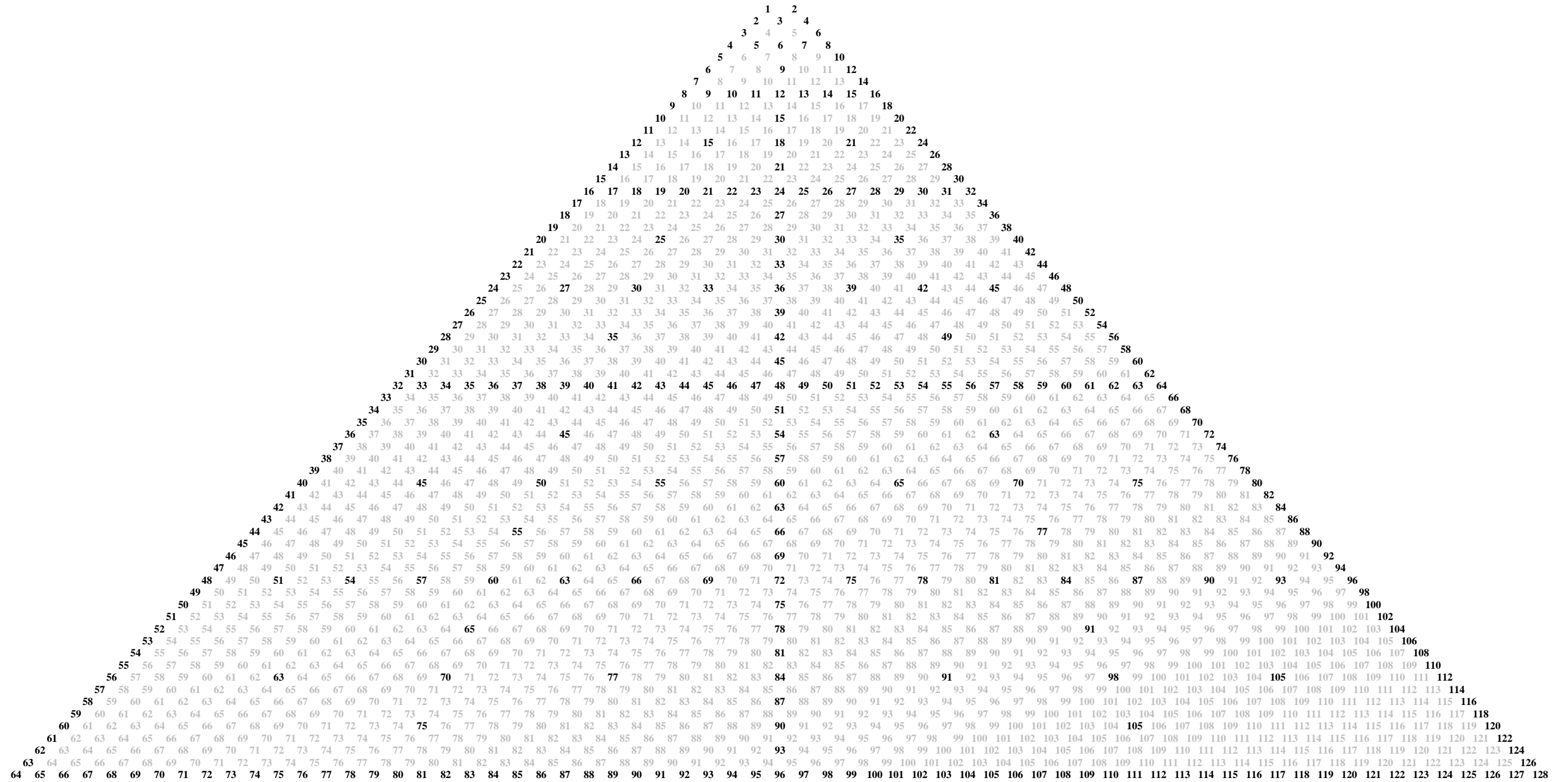


Procediendo de igual forma con todas las demás, hasta la 64, se obtiene el **gráfico 2**, en el que puede observarse el resultado de relacionar las series de los 64 primeros armónicos de la serie armónica básica o de los números naturales.

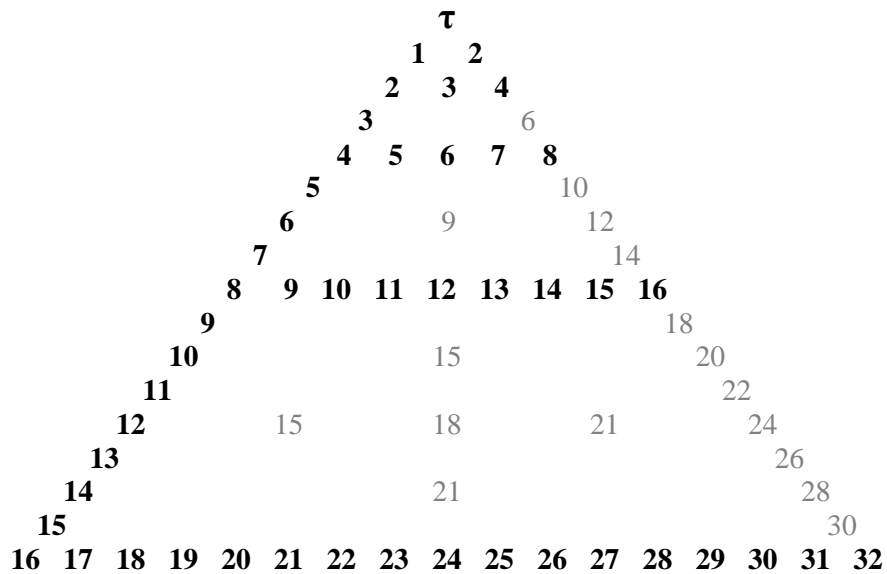
Si las líneas horizontales, como ya se ha dicho, van mostrando, en intervalos de octava, todas las "escalas naturales" posibles, ahora referidas a las series armónicas aludidas, es importante resaltar la línea vertical central y las oblicuas, simétricas a izquierda y derecha de la central, que se forman partiendo todas ellas de un hipotético vértice o punto de convergencia.

Todas estas líneas recibirán, a partir de ahora, la denominación de **líneas armónicas universales**, dado que cada una de ellas es un fiel reflejo de la serie básica, manteniendo en su formación idéntico procedimiento, o sea, el principio físico-armónico. **Cualquiera de ellas, y los elementos que la forman, conserva una relación interválica constante y única con cada una de las demás, quedando absolutamente definida, a todos los efectos, por el valor interválico obtenido al relacionarla con la línea armónica de la serie básica.** Las líneas armónicas universales determinan una nueva imagen del triángulo armónico universal, mediante su representación sobre el tapiz armónico de fondo. Este resultado es el que se muestra en el **gráfico 2**, abarcando también una extensión de siete octavas.

Gráfico 2.- LÍNEAS ARMÓNICAS UNIVERSALES

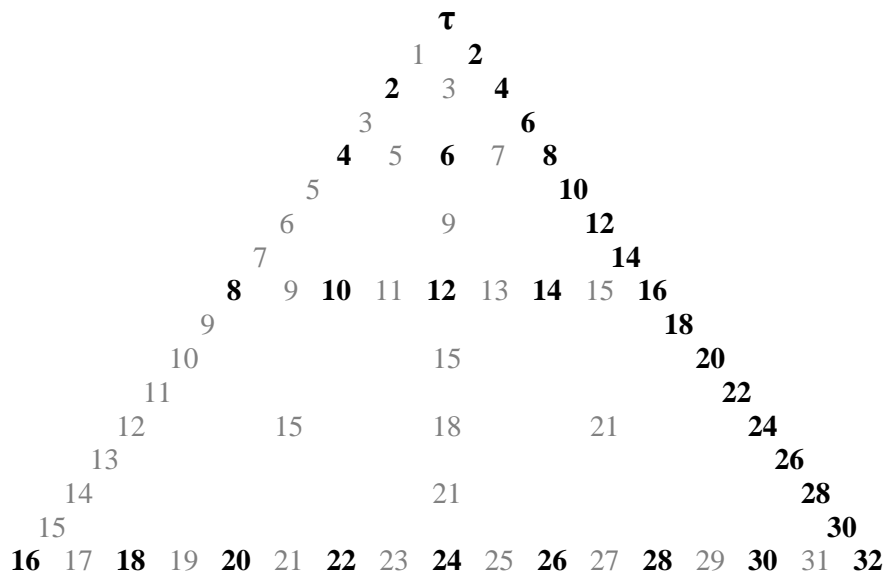


La línea de números que forma el lado izquierdo del triángulo armónico es la serie básica o de los números naturales, o L_1 , que tiene su correspondiente desarrollo horizontal, como ya se ha visto anteriormente.



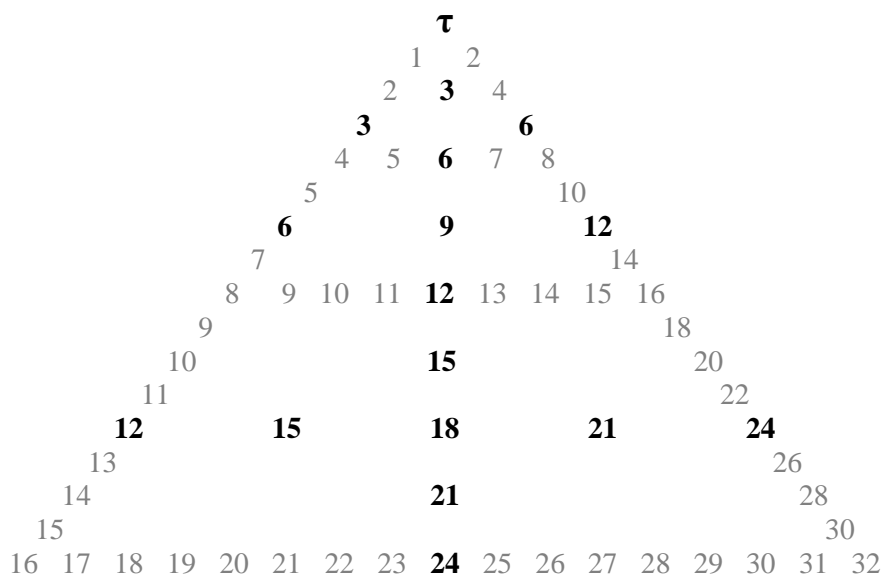
relación: 1:1 = 1

La línea derecha, o lado derecho del triángulo armónico se corresponde con la línea armónica del segundo término de la serie básica, o segundo armónico, que denominaremos L_2 . En la misma todos los términos de la serie básica aparecen duplicados lo que, en términos acústicos, significa que son las octavas de cada uno de ellos (relación 2:1). Esta es la única serie que empezando en número par (único número par que es también considerado primo) tiene su línea armónica propia. El resto de las líneas armónicas correspondientes a los números pares están asimiladas por las líneas armónicas de los números impares, tal como era de esperar según el proceso generativo que se viene desarrollando.



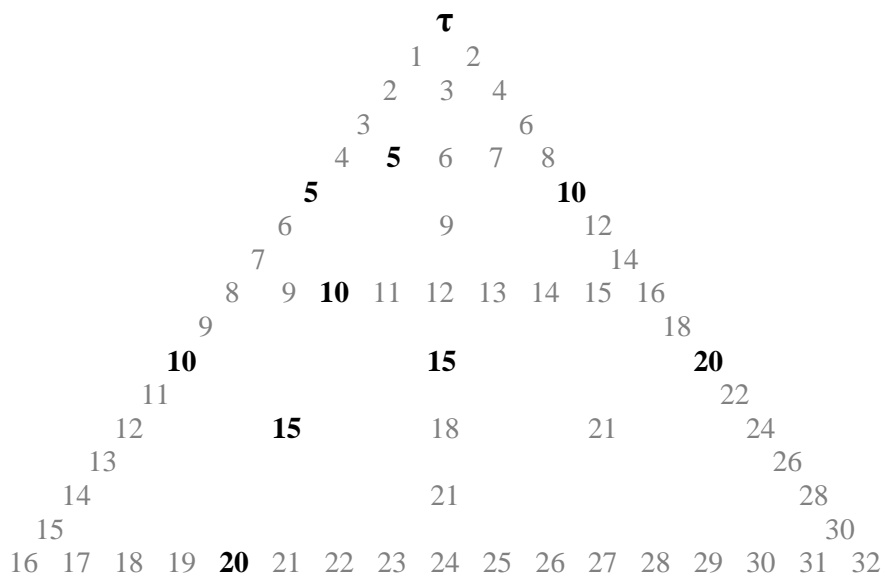
relación: 2:1 = 2

La línea que forma la bisectriz que incide desde el vértice sobre la base del triángulo parte del armónico 3 y contiene todos los términos correspondientes a su desarrollo natural (3, 6, 9, 12, 15... 3n). Al igual que cualquier término de la serie 2 se encuentra en la relación 2:1 con respecto a la serie 1, todos los términos de la serie 3, o L_3 , se encuentran en la relación **3:2** con sus equivalentes de la L_1 . Como es bien conocido, dicha relación es la que representa el intervalo de quinta justa en el sistema musical occidental, igual a **1,5**.



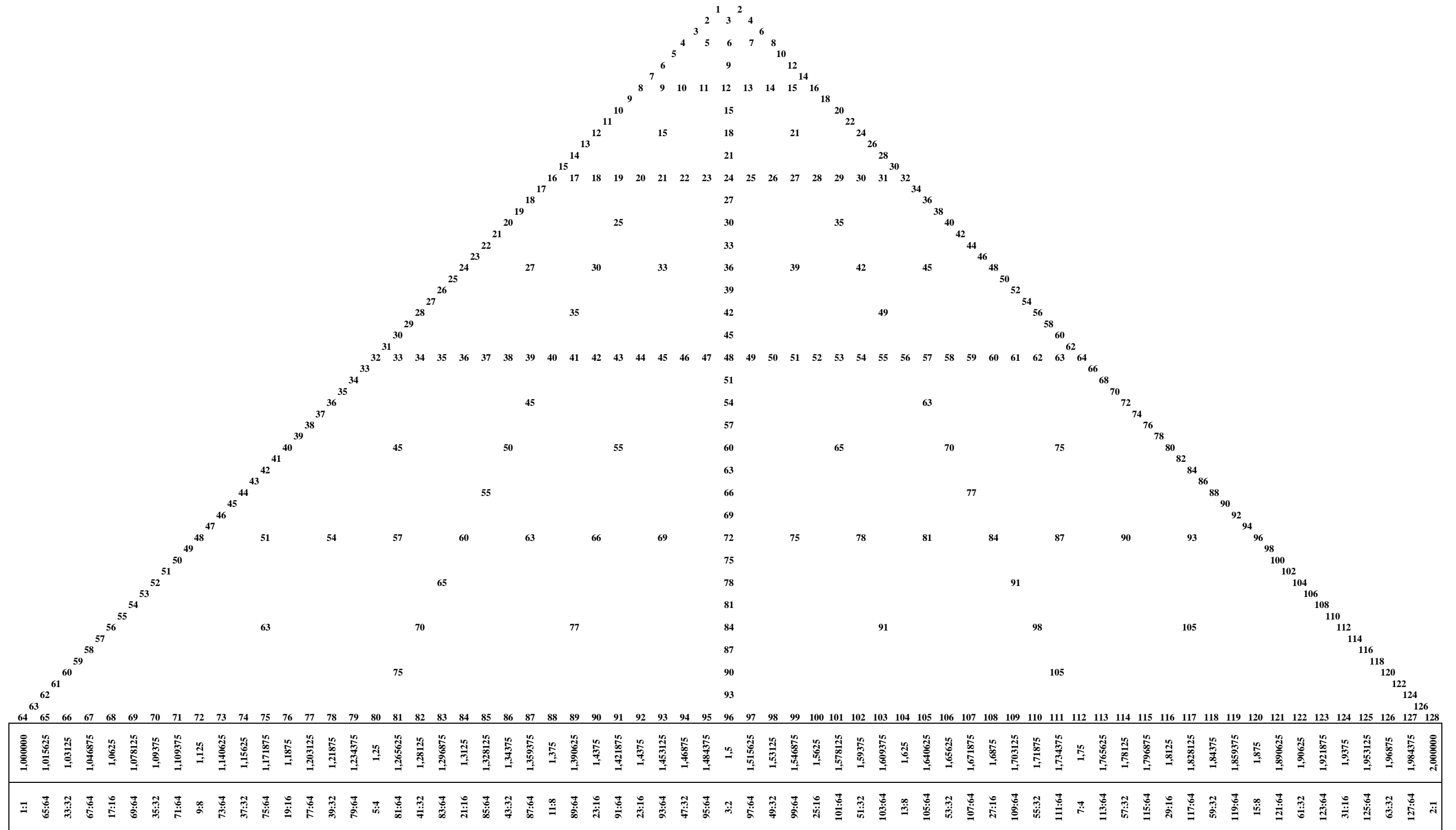
relación: 3:2 = 1,5

Siguiendo este reconocimiento de las líneas armónicas resultantes, la siguiente que se muestra independiente (aunque todas estén contenidas en la serie básica) es la del quinto armónico o L_5 . Al igual que ocurre con las anteriores, cualquier término de la misma guarda con los equivalentes de la serie básica la misma relación que, en este caso es la de **5:4**, también denominado intervalo de tercera mayor justa y cuyo valor es de **1,25**.



relación: 5:4 = 1,25

Gráfico 3.- LÍNEAS ARMÓNICAS UNIVERSALES CON TABLA DE VALORES INTERVÁLICOS



Se puede apreciar que existen valores interválicos fácilmente reconocibles dentro del sistema tradicional occidental, como no podía ser menos, pero es igualmente innegable que muchos de los valores que aparecen como resultado de la obtención de todas las líneas armónicas universales escapan a cualquier tipo de normalización establecida.

Esta evidencia lleva a considerar que, **cualquier sistema musical basado en la serie físico-armónica no es más que el resultado de una criba o anulación de gran parte de los armónicos naturales en beneficio de la supervivencia de unos pocos** que, teóricamente, debieran ser los más frecuentes.

Pero antes de entrar en detalles es importante retomar y transformar la representación gráfica de las líneas armónicas universales en el triángulo armónico y, también, el propio triángulo armónico universal para adecuarlo matemática y visualmente con la percepción sonora que, de los intervalos resultantes, efectúa el sentido auditivo.

2.4.- Rectificación gráfica del triángulo armónico.- Al plantear por primera vez el triángulo armónico referido a los números naturales, en el que cada línea sucesiva contempla a éstos uno tras otro hasta su duplicación (véase gráfico 1), no se ha tenido para nada en cuenta el valor de las relaciones existentes entre ellos en lo que se refiere a la realización de su representación gráfica, pues, por ejemplo, en la línea formada por el 2, el 3 y el 4, el 3 se sitúa a la mitad, equidistante del 2 y del 4, lo que a efectos de proporción, sensación sonora e interválica musical no es correcto. Para conocer el valor del intervalo acústico formado entre el armónico 3 y el 2 (3:2) hay que efectuar su división que da como resultado 1,5, valor que permanecerá idéntico para cualquier proporción que sea múltiplo de aquélla. Si procedemos de igual manera entre el 3 y el 4 (4:3) el resultado es 1,333333..., valor que también se mantendrá constante para todas las proporciones formadas por múltiplos de 4:3, lo que indica que el 3 y los términos de la serie armónica que encabeza no pueden ser representados por una línea que divida a la base del triángulo armónico por la mitad, como inicialmente se ha hecho. Además es el producto de 1,5 por 1,33333... el que da como resultado 2, o sea la duplicación o la octava del término o sonido que se tome como referencia.

Estas mismas circunstancias ocurren en las demás líneas armónicas que, según lo comprobado, están todas desviadas, en mayor o menor ángulo, con respecto a las proporciones interválicas que guardan con las líneas extremas (unísono y octava).

Si el producto de dos o más proporciones interválicas, contenidas en una octava, debe por definición ser igual a 2, nos encontramos ante la ecuación:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot n = 2$$

... siendo *a, b, c, d... n* los valores de los diferentes intervalos que se forman entre los distintos armónicos y el que encabeza cada línea horizontal en el triángulo armónico. Por tanto,

$$\log a + \log b + \log c + \log d + \dots + \log n = \log 2$$

De este modo ya se puede hacer una representación lineal de todos los intervalos y de las series armónicas. En el caso del ejemplo propuesto tendríamos la línea horizontal:

$$2 \quad 3 \quad 4$$

Se forman los intervalos 3:2, 4:3 y 4:2. Se deduce de ello que:

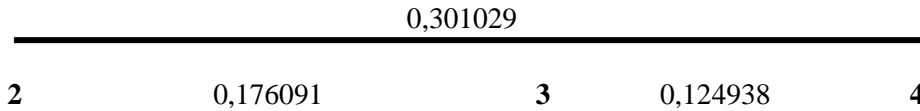
$$3:2 \cdot 4:3 = 4:2 = 2 \text{ o también}$$

$$1,5 \cdot 1,33333... = 2$$

$$\log 1,5 + \log 1,33333... = \log 2$$

$$0,176091... + 0,124938... = 0,301029...$$

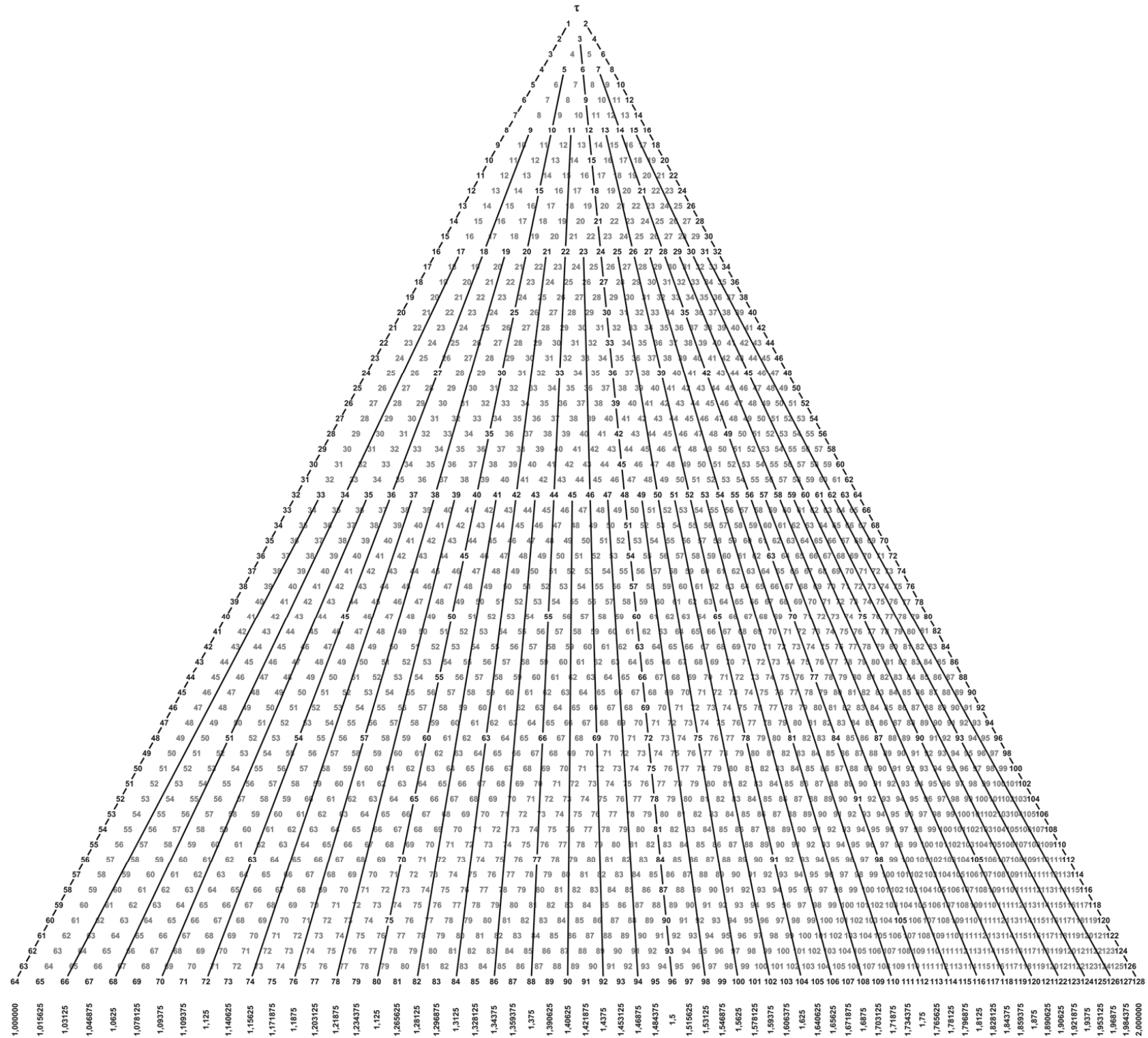
Representado estos valores en un segmento a escala tendremos:



Este mismo proceso llevado a todas las demás líneas armónicas da como resultado el triángulo armónico representado en el **gráfico 4** que, además y por razones de justas equidistancias, se transforma en equilátero. Queda claro que cualquiera de las líneas horizontales o "escalas naturales" están siempre comprendidas en un intervalo que tiene por valor $2n:n = 2$, de tal modo que todos los intervalos intermedios se representarán conforme sea el valor del logaritmo decimal del mismo al situarlo en el segmento que para cada línea horizontal se esté utilizando, según se avanza en la construcción del triángulo equilátero. La incorporación, en el vértice del triángulo de la letra griega τ , acrónimo de **triángulo armónico universal**, como ya se dijo, obedece a dos caprichosas decisiones como son que el triángulo quede siempre identificado mediante la utilización de esa letra griega y, por otra parte, a la intención de reflejar en ese mismo vértice el inaprensible origen del que emana todo el mundo físico y del que las líneas armónicas universales son, probablemente, su primera consecuencia material.

A partir de ahora éste será el modelo de triángulo armónico elegido para describir la formación de sistemas musicales armónicos, ya que refleja fielmente la ubicación de cada intervalo en su octava correspondiente y se obtiene además la ventaja de poder mostrar los valores de éstos en fracciones, valor numérico del intervalo o en una unidad de medida aceptada internacionalmente como es el "cents", mediante escalas convenientemente situadas en el inferior de su base. El **gráfico 5** vuelve a mostrar las líneas armónicas universales, ahora ya en su posición corregida de acuerdo a la nueva representación propuesta.

Gráfico 5.- LÍNEAS ARMÓNICAS UNIVERSALES



2.5.- Análisis somero de las líneas armónicas universales.- De la simple observación del triángulo armónico, en el que figuran marcadas las líneas armónicas universales, se desprende una clara dependencia de unas con respecto a otras y, también, una cierta independencia de la gran mayoría, unidas exclusivamente, a priori, por el vínculo de pertenecer todas a la serie básica o de los números naturales, en la quedan siempre integradas. Por tanto:

- **La línea del 1, L_1 , es la básica o primaria, conteniendo a lo largo de su infinito desarrollo a todas las demás** que, como tales, pueden considerarse como casos particulares, fragmentos o líneas subordinadas y derivadas de ella.
- **La línea 2, L_2 , y todas las pares son siempre octavas de los términos que se obtienen al dividir su armónico base por dos, por lo que pueden considerarse subordinadas siempre a las que se forman mediante los armónicos impares**, auténticos generadores de los posibles sistemas.
- De lo anterior puede deducirse que **los armónicos impares representan un estado de movimiento o dinámico, mientras que los pares reflejan una posición de reposo o estática**, estados ambos que, tanto los impares como los pares, transfieren a lo largo de toda la línea armónica que cada uno de ellos genera, ya que una línea de cabeza par sólo contiene armónicos pares, y una de cabeza impar va alternando los pares con los impares.
- **Todas las líneas, tanto pares como impares, comparten con la básica, o primaria, mayor cantidad de armónicos cuanto más cercanas se encuentren a ésta.**
- **Se consideran líneas independientes todas aquéllas que están encabezadas por un número primo**, como por ejemplo el 11, ya que el mismo no puede pertenecer a ninguna otra serie que no sea la básica, aunque sí comparta, con otras líneas, armónicos surgidos en su desarrollo, pero nunca todos.
- **Son líneas dependientes, por el contrario, todas aquéllas cuya cabeza se corresponde con un número que resulta ser múltiplo de otro u otros**, como por ejemplo el 21, que es múltiplo del 3 y el 7. Estas líneas pueden ser asimiladas en todos sus términos por otra u otras que siempre se encontrarán más cercanas a la serie básica. Así, la línea armónica L_9 es dependiente de la L_3 ; la línea L_{15} lo es de la L_3 y de la L_5 ; la L_{21} de la L_3 y de la L_7 ; la L_{25} lo es de la L_5 ; la L_{27} es derivada de la L_3 y de la L_9 , que, como se ha visto, lo es también de la L_3 ; la L_{33} depende de la L_3 y de la L_{11} ; la L_{35} de la L_5 y de la L_7 ; la L_{39} de la L_3 y de la L_{13} ; la L_{45} lo es de la L_3 , de la L_5 , de la L_9 y de la L_{15} ; la L_{49} depende de la L_7 ; la L_{51} de la L_3 y de la L_{17} ; la L_{55} de la L_5 y de la L_{11} ; la L_{57} de la L_3 y de la L_{19} ; y, por último, la L_{63} es derivada de la L_3 , de la L_7 , de la L_9 y de la L_{21} .
- **Cada línea, como ya se ha visto con anterioridad, determina a lo largo de todo su recorrido una proporción o intervalo constante con cada una de las líneas armónicas. Esta proporción o valor del intervalo referido a la línea básica es el que la define y la diferencia de cualquier otra.**

Examinados los fundamentos, formación, características y propiedades del triángulo armónico universal, quedan patentes sus indudables cualidades potenciales como herramienta en el estudio sistemático y coherente de los intervalos musicales, de las escalas que se deriven de ellos y de los sistemas musicales armónicos a que puedan dar lugar.